Scivolo per lo scarico di bielle o di pezzi di forma simile

Angelo Montorsi

Viene preso in considerazione uno scivolo sul quale viene posto un pezzo, all'uscita da una macchina operatrice, per farlo scendere e uscire orizzontalmente a un livello inferiore.
Dallo studio dell'energia persa per attrito nei vari tratti dello scivolo e nelle diverse condizioni cinematiche e dinamiche che possono presentarsi, si arriva alla determinazione della velocità con la quale il pezzo arriva all'uscita dallo scivolo.

The article considers a chute onto which a workpiece leaving the machine is fed and dropped to a lower level to be then discharged horizontally.
The study of friction losses along the chute under the several possible kinematic and dynamic conditions leads to the determination of chute exit speed.

Frequentemente, all'uscita di una macchina operatrice, il pezzo lavorato cade, o viene posto, su uno scivolo, che lo accompagna a un livello inferiore, al quale il pezzo esce orizzontalmente. Il pezzo preso in considerazione in questo studio è una biella per motore automobilistico, rappresentata schematicamente nella fig. 1, ma la trattazione è ugualmente valida anche per tutti i pezzi che abbiano una forma analoga.
Dalla fig. 2, che rappresenta lo schema dello scivolo preso in considerazione, si vede che questo è costituito da un primo tratto AB, inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale, e da un tratto orizzontale CD, raccordati da un tratto curvo BC, di raggio R.
Il problema che si vuole risolvere è quello di valutare la velocità v con la quale il pezzo lascia lo scivolo nel punto D.
Se si considera lo scivolo costituito da una superficie liscia, tale da poter trascurare l'attrito, in base al principio della conservazione dell'energia, cioè ponendo l'energia potenziale $E_p = mgh$ uguale all'energia cinetica $E_c = 1/2\, m\, v^2$, la velocità v è data dalla formula

$$v = \sqrt{2\,gh} \qquad (1)$$

dove g è l'accelerazione di gravità e h è il dislivello fra l'inizio e la fine dello scivolo, mentre m è la massa del pezzo.
Nella pratica non è possibile eliminare completamente la resistenza dovuta all'attrito, per vincere la quale viene dissipata una parte di energia. Se si indica con E_μ l'energia dissipata, il principio di conservazione dell'energia dà:

$$E_p = E_c + E_\mu \qquad (2)$$

$$mgh = \frac{1}{2}\, m\, v^2 + E_\mu$$

e quindi si ricava:

$$v = \sqrt{2\,(gh - E_\mu/m)} \qquad (3)$$

Appare chiaro che, se h e m sono dei dati del problema, e pertanto costanti, per aumentare v bisogna rendere minimo il valore del rapporto E_μ/m e quindi quello di E_μ.
Aggiungiamo inoltre che, se l'angolo α è minore dell'angolo di attrito, cioè se tg $\alpha < \mu_r$, dove μ_r è il coefficiente d'attrito radente, il pezzo rimane fermo sul tratto inclinato.
Per diminuire l'attrito, si può realizzare la pista di scorrimento dello scivolo con una serie di rulli volventi, come quello rappresentato nella fig. 3; il tratto inclinato AB risulta come rappresentato nella fig. 4, alla quale faremo riferimento nell'analisi che segue.
È opportuno precisare subito che, in questo caso, l'energia E_μ comprende, oltre alle perdite per attrito, anche una parte di energia cinetica, ceduta dal pezzo ai rulli per metterli in moto; riteniamo di poter inserire questa parte nell'energia persa per attrito, anche in considerazione del fatto che, se fra la discesa di una biella e quella della successiva c'è un intervallo di tempo sufficientemente lungo, i rulli si fermano dopo il passaggio di ogni pezzo.

COME VIENE AFFRONTATO IL PROBLEMA

Il problema della valutazione della velocità v con la quale il pezzo lascia lo scivolo si traduce, in base alla (3), in quello della valutazione dell'energia dissipata per attrito E_μ.
Per affrontarlo, si considerano separatamente i tre tratti che costitui-

Fig. 1

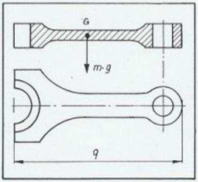
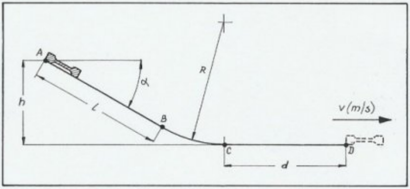


Fig. 2



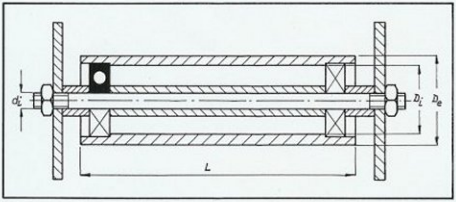
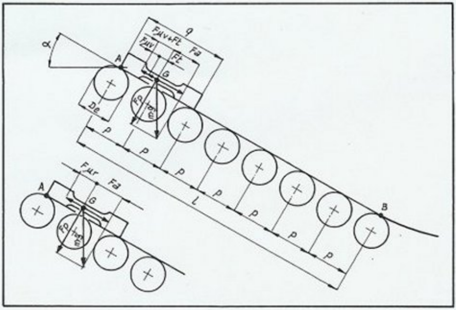


Fig. 3

Fig. 4



scono lo scivolo: inclinato (A-B), curvilineo (B-C) e orizzontale (C-D). La procedura seguita per il calcolo, leggermente diversa per i tre tratti, può essere sintetizzata come segue.
Il tratto inclinato è formato da rulli volventi; dopo aver individuato le forze che agiscono sul pezzo che scende e le formule relative, si ricava una formula di E_μ particolarmente semplice, valida se ci si trova nella condizione di strisciamento del pezzo sui rulli.
Nel caso più generale però, il pezzo che scende arriva con una certa velocità su un rullo fermo, striscia su questo per un certo tempo fino a quando la velocità periferica del rullo diventa uguale alla velocità del pezzo. In base alle formule che danno la resistenza opposta dal rullo, in presenza e in assenza di strisciamento, si ricavano le espressioni degli elementi del moto.
Per calcolare l'energia persa si passa poi a considerare il tratto inclinato costituito da un numero infinito di rulli di diametro infinitesimo e, ripetendo in parte il calcolo svolto precedentemente, si arriva alla determinazione dell'espressione della forza resistente, che porta, mediante integrazione, all'espressione di E_μ.

Il tratto curvilineo è considerato liscio e, oltre alla forza peso, viene presa in considerazione anche la forza centrifuga dovuta alla curvatura dello scivolo. Anche qui l'espressione di E_μ viene determinata mediante una integrazione dell'espressione della forza resistente totale.
Per quanto riguarda il tratto orizzontale, che è a rulli come quello inclinato, la trattazione è analoga a quella relativa a tale tratto. Ci si varrà pertanto delle formule ricavate per determinare le caratteristiche del moto lungo il tratto AB, ponendo uguale a zero l'angolo α e tenendo presente che lungo il tratto orizzontale l'accelerazione, alla quale è soggetta la biella, è negativa.

IL TRATTO INCLINATO

In assenza di strisciamento del pezzo sui rulli, le forze in gioco (vedi fig. 4) sono:

$$F_a = mg \sin \alpha$$

la quale tende ad accelerare il pezzo sullo scivolo;

$$F_i = \frac{q}{p} \cdot \frac{2J}{D_e} \vartheta' = \frac{q}{p} \cdot \frac{4J}{D_e^2} \cdot a$$

dovuta all'inerzia dei rulli, che si oppone al moto;

$$F_{\mu v} = \frac{2\, mg \cos \alpha}{D_e} \cdot (\mu_v + \mu_{vc})$$

dovuta all'attrito volvente tra il pezzo e i rulli di diametro D_e e all'attrito dei cuscinetti; si oppone al moto:

$$F_p = mg \cos \alpha,$$

componente del peso, perpendicolare al piano dello scivolo; non ha influenza diretta sul moto.
I simboli che compaiono nelle formule riportate sopra hanno i seguenti significati

$$J = m_r \cdot \frac{(D_i^2 + D_e^2)}{8}$$

momento dell'inerzia di massa di un rullo, avente una massa m_r;
q/p numero dei rulli sui quali appoggia la biella;

$$\vartheta' = \frac{2a}{D_e}$$

accelerazione angolare dei rulli, corrispondente all'accelerazione tangenziale a;

μ_v coefficiente d'attrito volvente;

μ_{vc} coefficiente d'attrito dei cuscinetti.

In caso di semplice strisciamento delle bielle sui rulli, indicando con μ_r il coefficiente d'attrito radente e con $F_{\mu r}$ la resistenza corrispondente, questa è data dalla formula:

$$F_{\mu r} = m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \mu_r \qquad (4)$$

Per valutare il tipo di moto che si stabilisce lungo lo scivolo, bisogna confrontare il valore di $F_{\mu r}$ con quello della somma $(F_i + F_{\mu v})$.
Se risulta

$$F_{\mu r} < F_i + F_{\mu v} \qquad (5)$$

i rulli rimangono fermi e il pezzo scende sullo scivolo strisciando. In queste condizioni l'energia persa dalla biella nel percorrere il tratto AB, di lunghezza l, è

$$E_{\mu(AB)} = m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \mu_r \cdot l \qquad (6)$$

Se invece della (5) vale la relazione

$$F_{\mu r} > F_i + F_{\mu v}, \qquad (7)$$

all'inizio del movimento, cioè nel punto A, la biella è sottoposta ad una accelerazione iniziale a_0 data dalla relazione:

$$a_0 = \frac{1}{m} (F_a - F_i - F_{\mu v}) \qquad (8)$$

dalla quale, introducendo al posto di F_a, F_i e $F_{\mu v}$ le espressioni viste sopra, dopo alcuni passaggi si ricava:

$$a_0 = g \; \frac{\left[\sin\alpha - \dfrac{2\cos\alpha}{D_e}(\mu_v + \mu_{vc}) \right]}{1 + \dfrac{q}{p} \cdot \dfrac{4\,J}{m\,D_e^2}} \qquad (9)$$

Dopo aver percorso un tratto di scivolo di lunghezza uguale alla distanza tra due rulli consecutivi p, il pezzo raggiunge la velocità

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot a_0 \cdot p} \qquad (10)$$

Il pezzo arriva, con velocità v_0, sopra un rullo fermo e si avrà quindi, in una prima fase, anche uno strisciamento con attrito radente.
La resistenza opposta dal rullo è data da

$$F^1_{\mu r} = \frac{m \cdot g \cdot \cos\alpha}{q/p} \cdot \mu_r \qquad (11)$$

mentre in assenza di strisciamento si avrebbe

$$F^1_{\mu v} + F^1_i = \frac{m \cdot g \cdot \cos\alpha}{(q/p)\cdot(D_e/2)} (\mu_v + \mu_{vc}) + \frac{4\,J}{D_e^2}\, a_0 \qquad (12)$$

L'accelerazione della biella subisce una diminuzione e diventa

$$a = a_0 - \frac{1}{m}\,(F^1_{\mu r} - F^1_{\mu v} - F^1_i) \qquad (13)$$

per ritornare al valore a_0 quando cessa lo strisciamento, cioè quando la velocità periferica del rullo diventa uguale alla velocità del pezzo che scende.
Per determinare la lunghezza del tratto lungo il quale il pezzo striscia su un rullo, uguagliamo la resistenza opposta dal rullo, data dalla (11) all'espressione generale di F^1_i che è:

$$F^1_i = \frac{2J}{D_e}\cdot \vartheta' + \frac{2m\cdot g\cdot\cos\alpha}{D_e\cdot(q/p)} \cdot \mu_{vc}$$

Si ricava

$$\vartheta' = \frac{m\cdot g\cdot\cos\alpha\cdot D_e}{2\,J\,(q/p)} \cdot \left(\mu_r - \frac{2\,\mu_{vc}}{D_e}\right)$$

e, ponendo

$$\vartheta' = \frac{2\,a'_r}{D_e},$$

$$a'_r = \frac{m\cdot g\cdot\cos\alpha\cdot D_e^2}{4J\,(q/p)} \cdot \left(\mu_r - \frac{2\,\mu_{vc}}{D_e}\right) \qquad (14)$$

a'_r è l'accelerazione tangenziale alla quale è sottoposto il rullo.
Lo spazio lungo il quale si ha strisciamento, percorso nel tempo t, risulta dato dalle formule seguenti:

$$S = v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2 \qquad (15)$$

se si considera il moto del pezzo, e

$$S = \frac{1}{2}\,a'_r\cdot t^2 \qquad (16)$$

se si considera il moto del rullo.
Uguagliando le due espressioni di S, si ha

$$t = \frac{2\,v_0}{a'_r - a}$$

e quindi

$$S = 2\,v_0^2 \cdot \frac{a'_r}{(a'_r - a)^2} \qquad (17)$$

Da quanto sopra si deduce che, con l'aumentare della velocità del pezzo, aumenta S, e quindi aumenta la tendenza allo strisciamento, mentre diminuisce l'accelerazione; questa assume il valore di a_0 dato dalla (9) all'inizio del moto ($S = 0$) e il valore

$$a_1 = g\,(\sin\alpha - \mu_r\cos\alpha) \qquad (18)$$

quando è $S = q$.
In questa condizione, il pezzo striscia su tutti i rulli e si avrà pertanto attrito radente.
Per determinare lo spazio percorso dal pezzo (s_1) quando $S = q$, indichiamo con $a_m = (a_0 + a_1)/2$ l'accelerazione media, con v_1 la velocità del pezzo quando $S = q$ e con t_1 il tempo impiegato per raggiungere tale condizione; si hanno le relazioni seguenti

$$s_1 = \frac{1}{2}\,a_m\,t_1^2 \qquad v_1 = a_m\cdot t_1$$

e quindi

$$s_1 = \frac{1}{2}\,\frac{v_1^2}{a_m} \qquad (19)$$

mentre la (17), ponendo $S = q$ e a_1 al posto di a, dà

$$v_1 = (a'_r - a_1)\cdot\sqrt{\frac{q}{2\,a'_r}} \qquad (20)$$

Si ha quindi

$$s_1 = \frac{1}{2}\,\frac{(a'_r - a_1)^2}{a'_r\cdot(a_0 + a_1)}\cdot q \qquad (21)$$

L'accelerazione a può poi essere espressa, in funzione dello spazio percorso s, come segue:

$$a = a_0 - \frac{s}{s_1}\,(a_0 - a_1) \qquad (22)$$

con $0 < s \leqslant s_1$.

LE PERDITE PER ATTRITO NEL TRATTO INCLINATO

Per calcolare l'energia persa dalla biella nel percorrere il tratto AB di lunghezza l, che abbiamo indicato con $E_{\mu(AB)}$, conviene passare agli infinitesimi. Consideriamo (vedi fig. 5) un numero infinito di rullini aventi passo dq, e momento d'inerzia

$$J_i = \frac{(D_i^2 + D_e^2)}{8}\,\mathrm{d}m_r \qquad (23)$$

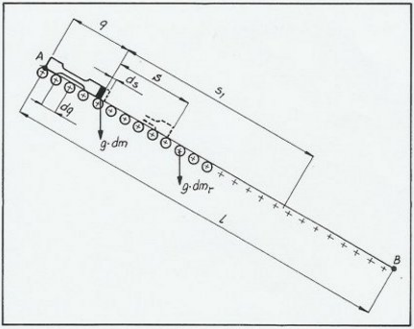
La forza F_{pi} agente su ogni rullo è

$$F_{pi} = g\cdot\cos\alpha\cdot\mathrm{d}m = g\cdot\cos\alpha\cdot m\cdot\frac{\mathrm{d}q}{q} \qquad (24)$$

e le espressioni (11) e (12) possono essere scritte come segue:

$$F^1_{\mu ri} = F_{pi}\cdot\mu_r = mg\cdot\cos\alpha\cdot\mu_r\cdot\frac{\mathrm{d}q}{q} \qquad (25)$$

Fig. 5



$$F^1_{\mu vi} + F^1_{ti} = \frac{m\,g\cos\alpha}{D_e/2}(\mu_v + \mu_{vc}) \cdot \frac{dq}{q} + \frac{1}{2}\frac{(D_i^2 + D_e^2)}{D_e^2} \cdot \frac{1}{p} \cdot m_r \cdot \left[a_0 - (a_0 - a_1)\frac{s}{s_1} \right] \cdot dq \quad (26)$$

Per semplificare la scrittura delle formule conviene porre

$$A = \frac{1}{q}\, m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot \mu_r$$

$$B = \frac{1}{q}\frac{m \cdot g \cdot \cos\alpha}{D_e/2} \cdot (\mu_v + \mu_{vc})$$

$$C = \frac{1}{2}\frac{(D_i^2 + D_e^2)}{D_e^2} \cdot \frac{m_r}{p}$$

e si ha quindi

$$F^1_{\mu ri} = A \cdot dq \quad (27)$$

$$F^1_{\mu vi} + F^1_{ti} = (B + C.a_0)\, dq + \frac{C}{s_1}(a_1 - a_0)\, s\, dq \quad (28)$$

Con le ulteriori sostituzioni

$$D = C \cdot q \cdot a_0$$

$$E = \frac{C}{s_1}\, q\,(a_1 - a_0)$$

e, osservando che è

$$F_t = C\,q\,a_0 + \frac{C}{s_1} \cdot q\,(a_1 - a_0)\, s,$$

si ottiene

$$F_t = D + Es \quad (29)$$

$$F_{\mu v} = B \cdot q \quad (30)$$

Le due espressioni (27) e (28) danno le forze che devono essere, rispettivamente, addizionata alla forza F_r e sottratta dalla stessa quando un rullino infinitesimo passa dalla condizione di attrito volvente alla condizione di attrito radente.
Il numero dei rullini su quali il pezzo striscia è dato da S/dq, dove S (vedi la formula 17) risulta

$$S = 2\,\frac{a'_r}{(a'_r - a_m)^2} \cdot v^2$$

che, essendo $v^2 = 2 \cdot a_m \cdot s$, diventa

$$S = 4\,\frac{a'_r \cdot a_m}{(a'_r - a_m)^2} \cdot s.$$

Ponendo

$$F = \frac{4\,a'_r\,a_m}{(a'_r - a_m)^2},$$

il numero dei rullini sui quali il pezzo striscia risulta

$$\frac{S}{dq} = \frac{F \cdot s}{dq}$$

Le variazioni della forza F_r, date, come si è detto, dalle (27) e (28), risultano:

$$F_{\mu ri} = A\, dq\,\frac{S}{dq} = A \cdot F \cdot s \quad (31)$$

$$F_{\mu vi} + F_{ti} = (B + C a_0)\, dq\,\frac{S}{dq} + \frac{C}{s_1}(a_1 - a_0)\, s\, dq\,\frac{S}{dq} = (B + C a_0)\, F \cdot s + \frac{C}{s_1}(a_1 - a_0)\, F s^2 \quad (32)$$

Sempre con lo scopo di semplificare la scrittura delle formule, conviene porre

$$G = A \cdot F$$

$$H = (B + C \cdot a_0) \cdot F$$

$$I = \frac{C}{s_1}(a_1 - a_0) \cdot F;$$

la (31) e la (32) diventano quindi:

$$F_{\mu ri} = G \cdot s \quad (33)$$

$$F_{\mu vi} + F_{ti} = H \cdot s + I \cdot s^2 \quad (34)$$

L'espressione di F_r, che è data da

$$F_r = F_t + F_{\mu v} + F_{\mu ri} - (F_{\mu vi} + F_{ti})$$

diventa

$$F_r = D + E \cdot s + B \cdot q + G \cdot s - (H \cdot s + I \cdot s^2)$$

e cioè

$$F_r = (D + Bq) + (E + G - H)\, s - I\, s^2 \quad (35)$$

Nel campo di variabilità di s,

$(0 < s \leqslant s_1)$ si ha

$$d\,E_\mu = F_r \cdot ds \quad (36)$$

e quindi si può ottenere l'espressione di E_μ integrando la (36) fra i due valori estremi $s = 0$ e $s = s_1$; si ha

$$E_{\mu(s_1)} = (D + B \cdot q)\, s_1 + (E + G - H)\,\frac{s_1^2}{2} - I \cdot \frac{s_1^3}{3} \quad (37)$$

Per calcolare il valore di $E_{\mu(AB)}$ è però necessario considerare separatamente due casi, se cioè s_1 è maggiore o minore della lunghezza totale l del tratto inclinato dello scivolo.
Se è $s_1 \geqslant l$, la (37) dà

$$E_{\mu(AB)} = (D + B \cdot q)\, l + (E + G - H)\,\frac{l^2}{2} - I \cdot \frac{l^3}{3} \quad (38)$$

mentre per $s_1 < l$ si ha

$$E_{\mu(AB)} = (D + B \cdot q)\, s_1 + (E + G - H) \cdot \frac{s_1^2}{2} - I \cdot \frac{s_1^3}{3} + A \cdot q\,(l - s_1) \quad (39)$$

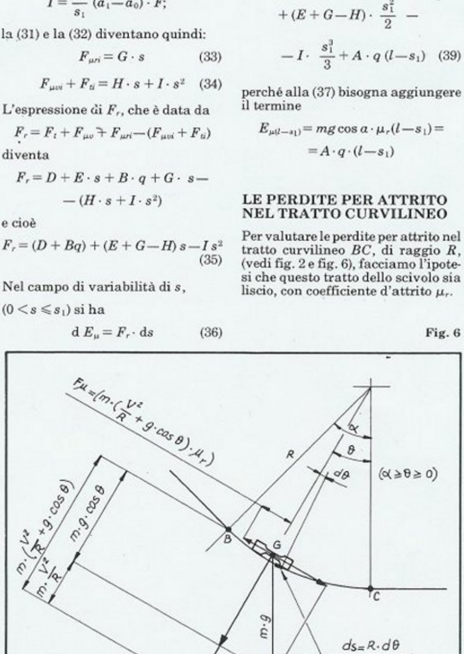
perché alla (37) bisogna aggiungere il termine

$$E_{\mu(l - s_1)} = mg\cos\alpha \cdot \mu_r (l - s_1) = A \cdot q \cdot (l - s_1)$$

LE PERDITE PER ATTRITO NEL TRATTO CURVILINEO

Per valutare le perdite per attrito nel tratto curvilineo BC, di raggio R, (vedi fig. 2 e fig. 6), facciamo l'ipotesi che questo tratto dello scivolo sia liscio, con coefficiente d'attrito μ_r.

Fig. 6



La forza con la quale la biella agisce sullo scivolo è data dalla somma della forza centrifuga, dovuta alla curvatura del percorso, e della componente della forza peso perpendicolare allo scivolo nel punto che si considera. Alle due forze corrispondono le forze resistenti $F_{\mu 1}$ e $F_{\mu 2}$ che sono date dalle relazioni seguenti:

$$F_{\mu 1} = m \, \frac{v^2}{R} \, \mu_r \qquad (40)$$

$$F_{\mu 2} = mg \cdot \cos \vartheta \cdot \mu_r \qquad (41)$$

ad esse corrispondono le perdite di energia per attrito

$$E_{\mu 1} = \int_0^a F_{\mu 1} \, \mathrm{d}s = R \int_0^a F_{\mu 1} \cdot \mathrm{d}\vartheta \quad (42)$$

$$E_{\mu 2} = \int_0^a F_{\mu 2} \, \mathrm{d}s = R \int_0^a F_{\mu 2} \cdot \mathrm{d}\vartheta \quad (43)$$

La perdita totale di energia per attrito lungo il tratto curvilineo BC risulta

$$E_{\mu(BC)} = E_{\mu 1} + E_{\mu 2} \qquad (44)$$

Per poter calcolare l'integrale che compare nella (42), bisogna esprimere $F_{\mu 1}$ in funzione di ϑ.
Dato che R è di solito molto grande e v è piccola, si può ritenere che il rapporto v^2/R, che compare nella (40), abbia un'influenza molto ridotta sul valore di $E_{\mu(BC)}$ e che l'aumento di velocità della biella dipenda solamente dalla differenza di altezza Δh fra il punto B e il punto C.
Questo equivale a considerare, nella determinazione della velocità v, assente l'attrito, che verrà invece tenuto nella debita considerazione negli sviluppi successivi del calcolo.
La velocità della biella, che nel punto B ha il valore

$$v_B = \sqrt{2\,(gl \sin a - E_{\mu(AB)}/m)} \qquad (45)$$

aumenta lungo il tratto curvilineo BC di

$$\Delta v = \sqrt{2\,gR \cdot (1 - \cos a)} \qquad (46)$$

Se si considera che la variazione Δv avvenga linearmente, la velocità istantanea v è data da

$$v = v_B + \frac{a - \vartheta}{a} \cdot \Delta v \qquad (47)$$

dove a e ϑ sono espressi in radianti.
La (47) dà

$$v^2 = [v_B^2 + (\Delta v)^2 + 2\, v_B \cdot \Delta v] + \left(\frac{\Delta v}{a}\right)^2 \cdot \vartheta^2 - \left[2\, \frac{(\Delta v)^2}{a} + 2\, \frac{v_B \cdot \Delta v}{a} \right] \vartheta$$

che, con alcune opportune sostituzioni semplificative, diventa

$$v^2 = L + M\,\vartheta^2 - N\,\vartheta \qquad (48)$$

Con questa espressione di v^2, introdotta nella (40), l'energia persa $E_{\mu 1}$, data dalla (42), risulta

$$E_{\mu 1} = m \cdot \mu_r \left(La + \frac{M}{3}\, a^3 - \frac{N}{2}\, a^2 \right) \qquad (49)$$

mentre la (43) dà

$$E_{\mu 2} = m\, g\, \mu_r \cdot R \cdot \sin a \qquad (50)$$

e l'energia persa per attrito nel tratto curvilineo $E_{\mu(BC)}$ è data dalla somma della (49) e dalla (50).
Come si è detto all'inizio di questo paragrafo, si è fatta l'ipotesi che il tratto curvilineo dello scivolo sia liscio. Rispetto a questa ipotesi, ci si dovrebbe trovare in condizioni più vantaggiose se anche il tratto curvilineo fosse fatto con rulli volventi; in questo caso bisognerebbe però tenere nel debito conto le perturbazioni dovute al fatto che la biella scenderebbe saltellando (vedi fig. 7); questo fa sorgere dei dubbi circa i vantaggi che ne deriverebbero, mentre risulterebbe sicuramente molto più complicata e difficile l'analisi.

LE PERDITE PER ATTRITO NEL TRATTO ORIZZONTALE

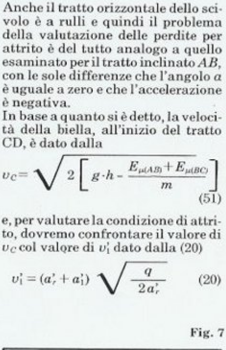
Anche il tratto orizzontale dello scivolo è a rulli e quindi il problema della valutazione delle perdite per attrito è del tutto analogo a quello esaminato per il tratto inclinato AB, con le sole differenze che l'angolo a è uguale a zero e che l'accelerazione è negativa.
In base a quanto si è detto, la velocità della biella, all'inizio del tratto CD, è dato dalla

$$v_C = \sqrt{2 \left[g \cdot h - \frac{E_{\mu(AB)} + E_{\mu(BC)}}{m} \right]} \qquad (51)$$

e, per valutare la condizione di attrito, dovremo confrontare il valore di v_C col valore di v'_1 dato dalla (20)

$$v'_1 = (a'_r + a'_1) \sqrt{\frac{q}{2a'_r}} \qquad (20)$$

Fig. 7



Se è $v_C < v'_1$, ci sarà strisciamento su una parte dei rulli, mentre su altri, dopo una prima fase di strisciamento, si passa ad attrito volvente.
Se $v_C \geqslant v'_1$ si ha strisciamento su tutti i rulli, salvo ricadere nella situazione precedente quando la velocità della biella diventa minore di v'_1.
Per $v_C < v'_1$ la lunghezza del tratto di strisciamento può essere determinata mediante la (17), e, indicando con v_C e a_C la velocità e l'accelerazione della biella quando si trova nel punto C, risulta

$$S_2 = 2\, v_C^2\, \frac{a'_r}{(a'_r + a_C)^2} \qquad (52)$$

Le formule (9) e (18), con $a = 0$, danno i valori dell'accelerazione:
per $S_2 = 0$

$$a'_0 = \left| -g\, \frac{\frac{2}{D_e}\,(\mu_v + \mu_{ve})}{\left(1 + \frac{q}{p} \cdot \frac{4\,J}{m\,D_e^2}\right)} \right| \qquad (53)$$

e per $S_2 = q$

$$a'_1 = \left| -g \cdot \mu_r \right| \qquad (54)$$

L'accelerazione media risulta

$$a_{m1} = \frac{a'_1 + a'_0}{2}$$

e, esprimendo l'accelerazione in funzione della velocità, potremo scrivere

$$a = \left| a'_0 - (a'_0 - a'_1)\, \frac{v}{v'_1} \right| \qquad (55)$$

da cui si ha

$a'_0 -$

$$a_c = \left| (a'_0 - a'_1)\, \frac{v_C}{v'_1} \right| \qquad (56)$$

La lunghezza del tratto necessario alla biella per fermarsi è dato dalla

$$s_2 = \frac{v_C^2}{2\, a_{m2}}$$

dove

$$a_{m2} = \frac{a_C + a'_0}{2}$$

Poichè la lunghezza del tratto orizzontale è d, l'accelerazione a_D nel punto D risulta

$$a_D = a_C - (a_C - a'_0)\, \frac{d}{s_2} \qquad (57)$$

e si può considerare che tutto il tratto lungo d sia percorso con una accelerazione

$$a_{m3} = \frac{a_C + a_D}{2}$$

Con l'ipotesi che nel tratto C-D la forza resistente F_r sia uguale a $m \cdot |\, a_{m3}|$, l'energia persa per attrito lungo tale tratto risulta

$$E_{\mu(CD)} = m \cdot |a_{m3}| \cdot d \qquad (58)$$

Se invece è $v_C > v'_1$, si avrà una forza resistente $F_r = mg\mu_r$ che agisce per uno spazio s_3 dato dalla

$$s_3 = \frac{(v_C - v'_1)}{2\,a'_1}$$

L'energia persa per attrito risulta diversa secondo che s_3 è maggiore o minore di d.
Per $s_3 > d$ si ha

$$E_{\mu(CD)} = mg\mu_r \cdot d$$

mentre, per $s_3 < d$, bisogna considerare separatamente l'energia persa nel tratto lungo s_3 che indichiamo con $E_{\mu(CD)1}$ e che risulta uguale a $mg\mu_r \cdot s_3$, e quella persa nel tratto lungo $(d - s_3)$, che indichiamo con $E_{\mu(CD)2}$.
La formula per il calcolo di $E_{\mu(CD)2}$ è del tutto simile alla (58) ed è

$$E_{\mu(CD)2} = m \cdot a_{m4}\,(d - s_3) \qquad (59)$$

dove a_{m4}, accelerazione media nel tratto di lunghezza $(d - s_3)$, può essere calcolata con il procedimento visto prima per il calcolo di a_{m3}.
Lo spazio s_4 percorso con accelerazione a_{m1} e velocità iniziale v'_1 data dalla (20), è

$$s_4 = \frac{v_1'^2}{2 \cdot a_{m1}}$$

La (57) in questo caso diventa

$$a'_D = a'_1 - (a'_1 - a'_0)\,\frac{d - s_3}{s_4}$$

e per a_{m4} si ha l'espressione

$$a_{m4} = \frac{a'_1 + a'_D}{2}$$

CONCLUSIONE

Si sono così determinate le formule che danno l'energia persa per attrito nei tre tratti dello scivolo e nelle diverse condizioni cinematiche e dinamiche che possano presentarsi.
La biella, o più in generale il pezzo, che scende lungo lo scivolo, avrà nel punto D la velocità

$$v = \sqrt{2\,(gh - E_\mu / m)} \qquad (3)$$

dove E_μ è la somma delle energie perse nei tre tratti e cioè

$$E_\mu = E_{\mu(AB)} + E_{\mu(BC)} + E_{\mu(CD)}$$