INTRODUZIONE

Ispirandosi al famoso "Philosophiae naturalis principia mathematica" di Isac Newton (1642 - 1727) opera nella quale erano descritte le leggi della fisica in veste matematica, l'autore presenta al vasto pubblico dei giocatori di biliardo, le leggi meccaniche che governano il moto delle biglie sul tavolo verde, analizzandone gli urti reciproci e gli impatti con le sponde del biliardo.

L'autore, mediocre giocatore, non intende erigersi a maestro di chi ha una qualità di gioco superiore alla sua; la quale non è solo il frutto di conoscenze tecniche, ma è supportata in modo preponderante da abilità strategiche e fantasia di gioco.

L'intento di questo scritto è di portare alla conoscenza dei giocatori, le leggi fisiche nascoste, sotto le abituali mosse da loro compiute nello svolgimento del gioco; di modo che l'accresciuta consapevolezza, possa migliorarlo.

Il linguaggio utilizzato sarà il più semplice possibile, compatibilmente con il compito, imposto dalla materia trattata.

Nel testo troverete una certa quantità di formule, vi consiglio di continuare a leggere ignorandole e cercando di cogliere il senso della trattazione, successivamente una rilettura più attenta e completa non dovrebbe presentare eccessive difficoltà.

Se anche un solo giocatore ed in una sola occasione troverà giovamento dalla lettura di queste righe, l'autore ne sarà pienamente gratificato.

L'autore

INDICE:

1.1 LE TRAIETTORIE

Le traiettorie disegnate dalle biglie sull'ideale foglio di carta costituito dal tappeto verde sono il risultato dell'applicazione di questi principi:

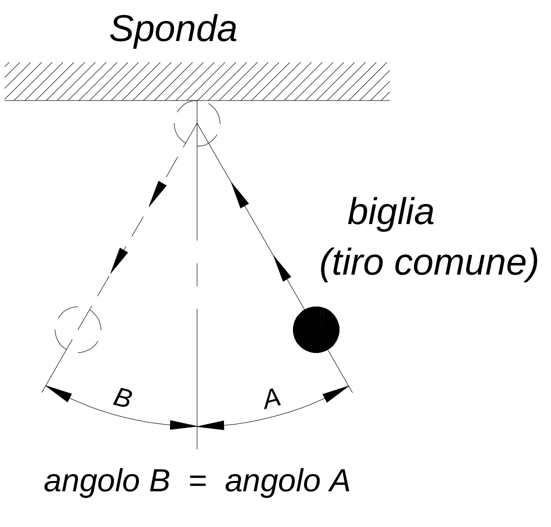
1) ***la biglia si sposta in linea retta finché non colpisce una sponda del bigliardo o non urta un'altra biglia.***

2) ***se la biglia colpisce una delle quattro sponde, è respinta (Fig.1.1) seguendo una linea, che forma un angolo simmetrico, rispetto ad una retta, perpendicolare alla sponda e passante per il punto d'impatto.***

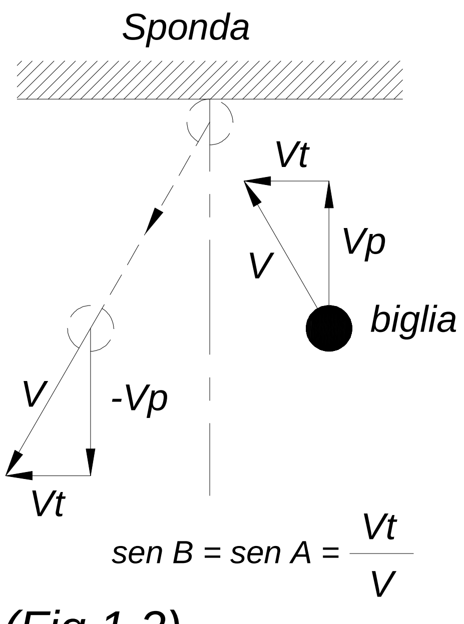
3) ***se la biglia, animata da una velocità lineare e da un moto di rotolamento urta un'altra biglia, in generale cede all'altra biglia una percentuale più o meno elevata della propria energia cinetica (energia associata al suo moto lineare) e conserva inalterata l'energia associata al suo rotolamento (sempre cinetica ma dovuta al suo moto rotatorio).***

Il primo principio non richiede ulteriori commenti, mentre il secondo ed il terzo vanno approfonditi.

*Il risultato presentato nel secondo principio è cosi motivato; la biglia nel suo moto verso la sponda, è generalmente animata da una velocità (**V**), le cui componenti sono (vedi Fig.1.2) : (**Vp**) diretta sulla perpendicolare alla sponda e (**Vt**) diretta trasversalmente.*



(Fig.1.1)



(Fig.1.2)

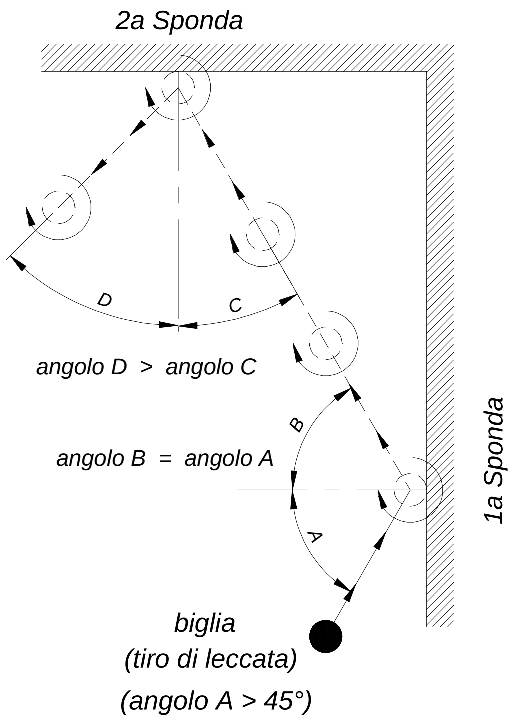
*Nell'impatto la componente (**Vp**), inverte il suo segno (**-Vp**), mentre la componente trasversale (**Vt**) rimane inalterata e la nuova velocità (**V**) assunta dalla biglia risulta la composizione di due vettori che hanno lo stesso modulo (intensità) dei precedenti e di cui uno è cambiato di segno (**-Vp**).*

Il comportamento di una biglia respinta dalla sponda è analogo al comportamento di un raggio di luce riflesso dallo specchio, rispettando la legge di riflessione su di una superficie piana.

*Volendo essere rigorosi nella trattazione, dobbiamo aggiungere che il secondo principio è in generale valido, soltanto quando l'angolo della traiettoria ha un'inclinazione, rispetto alla perpendicolare della sponda, inferiore ai **45°** circa.*

*Quando l'angolo di incidenza supera i **45**°, veniamo a trovarci nel caso tipico del **tiro di leccata** (meglio famoso nell'ambiente frequentato dell'autore come **tiro alla KIT**, dal vezzeggiativo col quale è nominato un giocatore che abusa di questo tiro).*

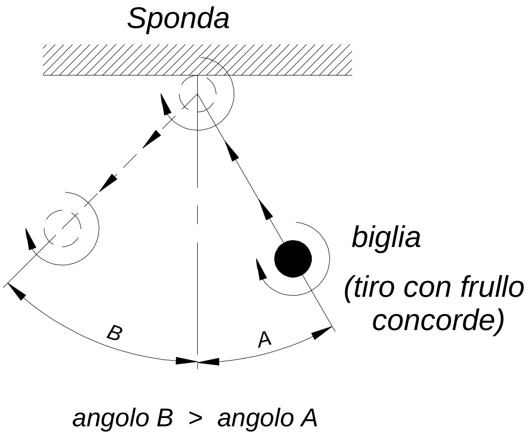
*Il **tiro di leccata** (vedi Fig.1.3), introduce nel moto della biglia, una rotazione della stessa rispetto ad un asse verticale, creando una turbativa del semplice moto di rotolamento, la cui conseguenza si traduce in un maggior angolo di risposta (**angoloD** > **angolo C**)nel contatto con la sponda successiva (**2a Sponda**).*



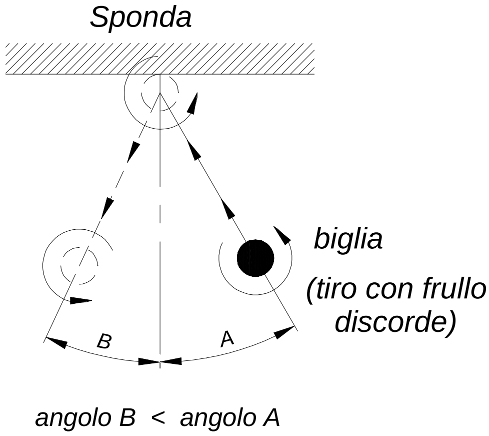
(Fig.1.3)

*L'effetto del **tiro di leccata**, è ulteriormente amplificato, nel **tiro col frullo**, dove il giocatore imprime volontariamente alla biglia una rotazione con asse verticale.*

*Nel **tiro col frullo**, l'effetto leccata, viene amplificato (**angolo B > angolo A**) o ridotto (**angolo B < angolo A**), rispettivamente a seconda che il senso di rotazione impresso alla biglia sia **concorde** (vedi Fig.1.4) tale cioè da favorire un sorta di arrampicata della stessa sulla prima sponda incontrata o **discorde** (vedi Fig.1.5)*



(Fig.1.4)



(Fig.1.5)

2.1 L'ENERGIA

Le biglie, durante il loro moto sul tappeto verde, sono assoggettate al principio di conservazione dell'energia.
(Ricordiamo che l'energia, per definizione, esprime la capacità di compiere un lavoro e si può presentare sotto varie forme: elettrica, termica, chimica, meccanica).

Nel nostro caso possiamo prendere in esame la sola energia meccanica, trascurando le altre forme, le quali intervengono in modo nettamente trascurabile, sul moto delle biglie.

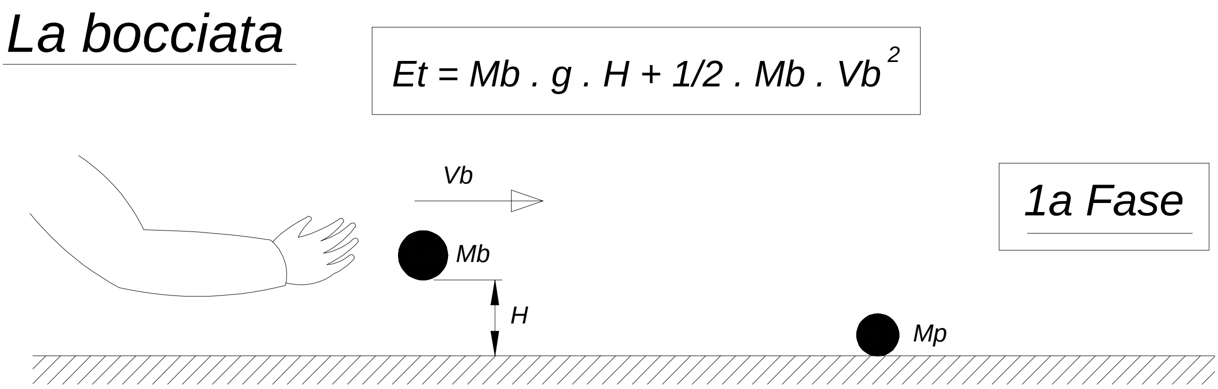
*Nel gioco delle boccette, si inizia con la bocciata; il giocatore nel compimento di questa azione e nel caso più generale, lancia la biglia in direzione del pallino e quando viene rilasciata, la biglia si trova sollevata dal piano di gioco, ad un'altezza che chiameremo **(H)** ed è animata da una velocità lineare **(Vb)** in direzione del pallino.*

*Se indichiamo con **(Mb)** la massa della biglia, l'energia iniziale risulta composta di due termini (**Fig.2.1 – 1a Fase**):*

$$Ep = Mb \cdot g \cdot H$$ *(energia potenziale dovuta alla posizione in altezza dal piano di gioco, dove **g** = 9,81 m/s^2 è l'accelerazione di gravità)*

ed

$$Ec = ½ \cdot Mb \cdot Vb^2$$ *(energia cinetica dovuta alla velocità lineare impressa alla biglia col suo lancio)*



(Fig.2.1)

La somma:

$$\mathbf{Et = Ep + Ec}$$

esprime l’energia totale **(Et)** iniziale che deve conservarsi durante l’azione della bocciata.

Naturalmente questa energia, verrà dispersa secondo varie modalità (altrimenti avremmo inventato il moto perpetuo) ed alla fine biglia e pallino cesseranno il loro movimento, azzerando così la loro energia meccanica iniziale.

Avevamo lasciato la biglia sospesa sul piano di gioco e quindi in volo verso il pallino; la biglia generalmente entra in contatto col piano di gioco (cioè atterra) prima di colpire il pallino, ed in questo momento iniziano i guai per l’autore (vi dirò più tardi il perché).

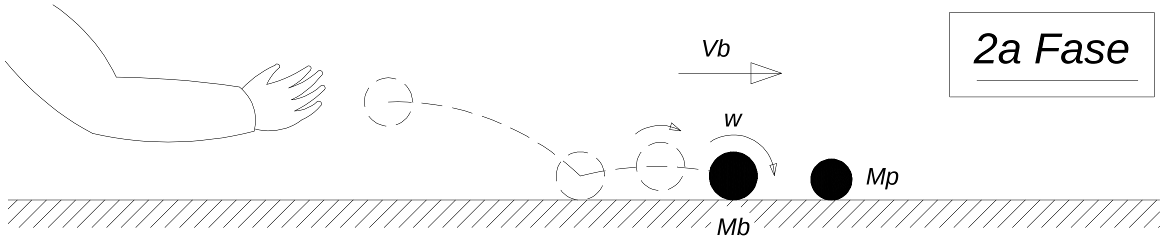
Al contatto col piano di gioco, segue una fase durante la quale la biglia striscia sul tappeto iniziando a rotolare.

Durante la fase appena descritta, l’energia **(Et)** cambia aspetto per l’introduzione del moto di rotolamento della biglia e diviene (**Fig.2.2 – 2a Fase**):

$$\mathbf{Et = \tfrac{1}{2} \,.\, Mb \,.\, Vb^2 + \tfrac{1}{2} \,.\, J \,.\, w^2}$$

dove il primo termine **($1/2 \,.\, Mb \,.\, Vb^2$)** esprime l’energia associata al moto lineare mentre **($\tfrac{1}{2} \,.\, J \,.\, w^2$)** l’energia associata al rotolamento (per la spiegazione di quest’ultimo termine si rimanda all’appendice 5.1).

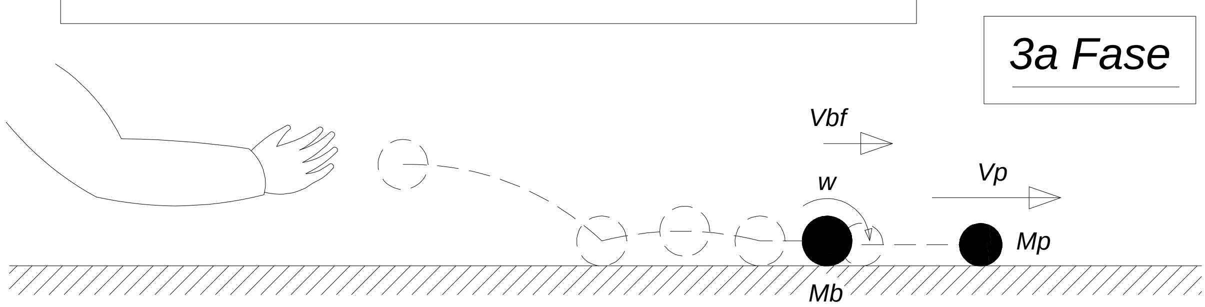
$$Et = 1/2 \, . \, Mb \, . \, Vb^2 + 1/2 \, . \, J \, . \, w^2$$



(Fig.2.2)

*Finalmente la biglia colpisce il pallino e nell'urto gli trasferisce una parte dell'energia cinetica racchiusa nel termine **(Ec = ½ . Mb . Vb ^{2})** ed il pallino si mette in moto alla velocità **(Vp)**; siccome poi **Mb > Mp** (la massa della biglia è maggiore di quella del pallino), la biglia conserva dopo l'urto una velocità **(Vbf).***
*Riassumendo, dopo l'urto avremo (**Fig.2.3 – 3a Fase**):*

$$Et = 1/2 \, . \, Mb \, . \, Vbf^2 + 1/2 \, . \, J \, . \, w^2 + 1/2 \, . \, Mp \, . \, Vp^2$$



(Fig.2.3)

$Et = Ecb + Erb + Ecp$

*Dalla analisi sulla ultima espressione, deduciamo che una parte dell’energia **(Ecp)** è trasferita al pallino e la biglia conserva l’energia **(Ecb + Erb)**; questa energia residua è responsabile dello spazio percorso dalla biglia al termine della bocciata, il quale se eccessivo può portare la biglia ad abbattere eventuali birilli, rimasti in sede dopo il passaggio del pallino, col disastroso risultato, di regalare all’avversario tutti i punti realizzati **(questi i guai sofferti dall’autore)**.*

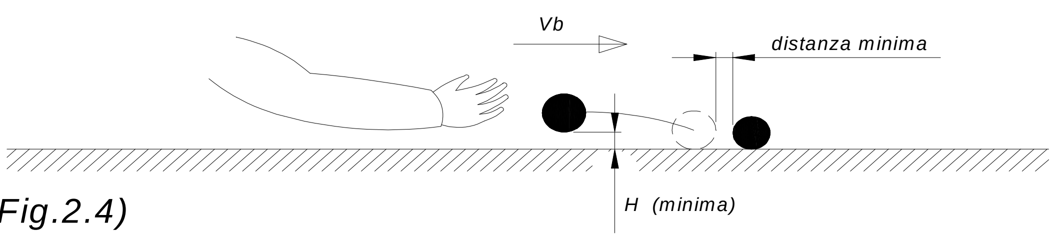
*Sorge quindi spontaneo chiedersi come minimizzare l’energia **(Ecb + Erb).** L’unico modo per ridurre **($Ecb = \frac{1}{2} \cdot Mb \cdot Vbf^2$)** consiste nell’effettuare la bocciata con minor impeto, mentre la riduzione di **($Erb = \frac{1}{2} \cdot J \cdot w^2$)** si può ottenere :*

a) *rilasciando la biglia il più vicino possibile al pallino, limitando quindi lo spazio a disposizione per l’inizio del rotolamento.*

b) *rilasciando la biglia ad una minor altezza rispetto al piano di gioco, ritardando così la rapidità con la quale, dallo strisciamento sul tappeto, si passa al rotolamento, questo perché si riduce la pressione di contatto della biglia sul tappeto nel momento dell’atterraggio.*

c) *imprimendo durante la bocciata una controrotazione alla biglia, in modo tale che al momento del rilascio questa possieda una energia **($Erb = -\frac{1}{2} \cdot J \cdot w^2$)** negativa.*

La bocciata ideale



(Fig.2.4)

N.B.: L’analisi condotta sin qui, presuppone che il pallino venga colpito in pieno, non ritengo necessario illustrare gli effetti nefasti che solitamente accompagnano un modo diverso di colpirlo.

5.1 L'URTO ELASTICO

Nel capitolo precedente abbiamo analizzato la bocciata iniziale, senza entrare nel dettaglio dell'impatto tra biglia e pallino, cosa che faremo in questo capitolo.

Le biglie si possono considerare come corpi rigidi e perfettamente adatte a generare quello che in meccanica viene definito come ***URTO ELASTICO.***

L'analisi dell'urto elastico impone l'introduzione del principio di conservazione della quantità di moto, il quale così recita: < ***in un sistema isolato la quantità di moto totale si conserva durante l'urto elastico*** *> nel senso che dopo l'impatto della bocciata ritroviamo la stessa quantità di moto che avevamo prima, magari diversamente attribuita tra gli attori dell'urto (biglie e pallino).*

Per quantità di moto ***(P)*** *si intende il prodotto:*

$$P = M \cdot v \qquad (M = \text{massa della biglia; } v = \text{velocità lineare})$$

Applicando questo principio nel caso più generale avremo:

$$M1 \cdot v1i + M2 \cdot v2i = M1 \cdot v1f + M2 \cdot v2f$$

con ***M1*** *e* ***v1i*** *indichiamo rispettivamente massa e velocità iniziale della biglia, che andrà a colpire la biglia od il pallino di massa* ***M2*** *e velocità iniziale* ***v2i****, mentre con* ***v1f*** *e* ***v2f*** *le velocità finali (dopo l'urto) delle biglie di massa* ***M1*** *e* ***M2*** *rispettivamente.*

Durante l'urto vale anche il principio di conservazione dell'energia ed avremo anche:

$$\tfrac{1}{2} \cdot M1 \cdot v1i^2 + \tfrac{1}{2} \cdot M2 \cdot v2i^2 = \tfrac{1}{2} \cdot M1 \cdot v1f^2 + \tfrac{1}{2} \cdot M2 \cdot v2f^2$$

*Generalmente la biglia che viene colpita è ferma prima dell'urto, cioè (**v2i = 0**) semplificando così il problema e di conseguenza le equazioni scritte poco sopra, le quali assumono il seguente aspetto:*

$$M1 \cdot v1i = M1 \cdot v1f + M2 \cdot v2f$$

$$\tfrac{1}{2} \cdot M1 \cdot v1i^2 = \tfrac{1}{2} \cdot M1 \cdot v1f^2 + \tfrac{1}{2} \cdot M2 \cdot v2f^2$$

Premettiamo che quanto detto fino a questo momento, tiene in conto soltanto la componente lineare della velocità e non della rotazione delle biglie, effetto che si somma a quelli qui considerati.

Manipolando le espressioni precedenti otteniamo:

$$v1f = ((M1 - M2) : (M1 + M2)) \cdot v1i \qquad e \qquad v2f = ((2 \cdot M1) : (M1 + M2)) \cdot v1i$$

*che nel caso dell'urto tra biglie (**M1 = M2**) diventano:*

$$v1f = 0 \qquad e \qquad v2f = v1i$$

*(cioè la biglia che viene lanciata si ferma e la biglia colpita assume la velocità che aveva la biglia colpitrice prima dell'impatto), mentre nel caso della biglia (**Mb**) che colpisce il pallino (**Mp**) abbiamo:*

vbf = ((Mb – Mp) : (Mb + Mp)) . vbi *e* ***vpf = ((2 . Mb) : (Mb + Mp)) . vbi***

*la velocità finale (**vbf**) della biglia conserva un valore che dipende dalla differenza di massa (**Mb – Mp**) tra biglia e pallino, mentre il pallino si anima della velocità (**vpf**) maggiore della velocità iniziale (**vbi**) della biglia colpitrice; conseguenza del fatto che il termine:*

(2 . Mb) : (Mb + Mp) *risulta sempre > 1 (maggiore di 1), siccome*

(2 . Mb) > *(è maggiore di)* ***(Mb + Mp)***

nel caso specifico abbiamo:

biglia *diametro = 59 mm (**Mb = 1)** (assumiamo per la massa il valore relativo **1**)*

pallino *diametro =54 mm (**Mp = 0,77)** (valore relativo alla massa della biglia)*

quindi:

(2 . Mb) : (Mb + Mp) = (2 . 1) : (1 + 0,77) = 1,13 ***vpf = 1,13 . vbi***

*il pallino assume una velocità, che supera del **13 %** la velocità iniziale della biglia colpitrice, mentre:*

(Mb – Mp) : (Mb + Mp) = (1 – 0,77) : (1 + 0,77) = 0,13 ***vbf = 0,13 . vbi***

*la biglia conserva il **13 %** della velocità che aveva, prima dell'impatto col pallino.*

Quando durante il gioco, accade che sia il pallino, a colpire una biglia ferma sul tappeto verde, avremo:

vpf = ((Mp – Mb) : (Mp + Mb)) . vpi ***e*** ***vbf = ((2 . Mp) : (Mp + Mb)) . vpi***

*ed assegnando alle masse di pallino e biglia I valori relativi utilizzati nei calcoli precedenti (**Mp = 0,77; Mb = 1**), otteniamo:*

vpf = ((0,77 – 1) : (1 + 0,77)) . vpi = (-) 0,13 . vpi

vbf = ((2 . 0,77) : (1 + 0.77)) . vpi = (+) 0,87 . vpi

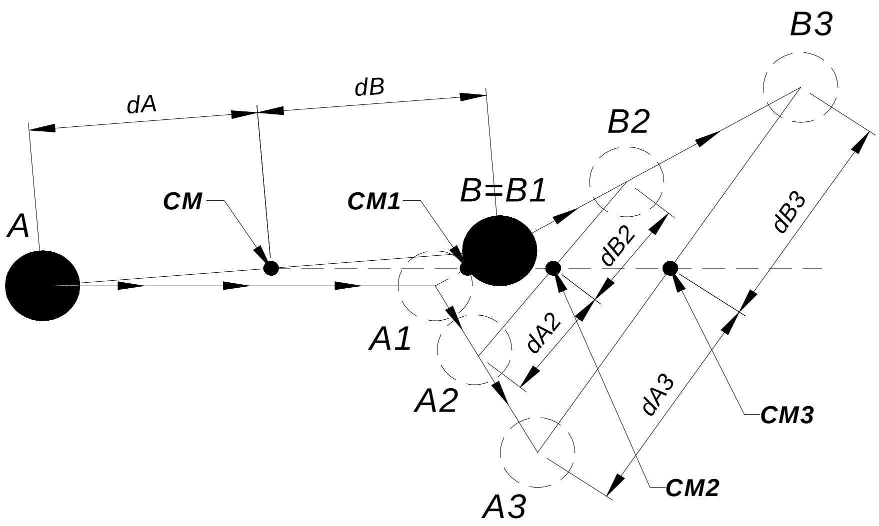
*il segno (**-**) nella prima espressione ci dice che il pallino inverte il senso del suo movimento, cioè rimbalza sulla biglia conservando il **13 %** della sua velocità (**vpi)** prima dell'impatto; mentre la biglia si mette in moto animata di una velocità che è l' **87 %** della velocità che animava il pallino prima di colpirla.*

Le considerazioni sull'urto elastico fin qui riportate, come già avvertito in precedenza, sono valide solamente, se gli impatti tra le biglie sono perfettamente centrati (le biglie ferme devono essere colpite in pieno) e se trascuriamo il moto di rotolamento, normalmente associato alle biglie colpitrici e di solito acquistato dalle biglie bersaglio.

Nel caso più generale, gli impatti non sono perfettamente centrati e le biglie, possiedono un moto di rotolamento; situazione che analizzata nel dettaglio, porterebbe la descrizione ad un livello di complessità tale, da trascendere l'intento di queste righe.

*Diamo comunque un cenno sulla regola generale, valida per gli impatti centrati e non centrati: < **il moto del centro di massa, del sistema, costituito dalla biglia colpitrice e dalla biglia bersaglio, non si modifica durante l'urto** >.*

*Con riferimento alla **Fig.3.1** avremo che ad ogni istante (**dA = dB)** sia prima che dopo l'impatto.*



(Fig.3.1)

*Questa regola può aiutare, se correttamente applicata nel prevedere la direzione che prenderà la biglia colpitrice dopo l'impatto; per evitare ad esempio, che dopo aver colpito in modo apparentemente perfetto una biglia, la biglia colpitrice prenda inesorabilmente la direzione della buca più vicina, regalando all'avversario i punti realizzati con la biglia colpita, lasciando nell'autore del tiro (**che sfortuna !**) un senso di frustrazione e di sfiducia.*

Questo poteva essere evitato, semplicemente variando la traiettoria del tiro, rendendo così impossibile il perpetuarsi dell'evento.

*A chi ha resistito a leggermi fin qui, và il mio più sincero ringraziamento ed il consiglio di non affrontare **l'appendice 5.1** la quale è stata inserita all'unico scopo di gratificare il narcisismo dell'autore, con uno sfoggio di abilità matematica, teso a dimostrare la formuletta del momento d'inerzia di massa della sfera (biglia):*

$$J = 2/5 \cdot M \cdot R^2$$

che si trova su tutti i manuali di meccanica senza dimostrazione.

5.1 SIMBOLOGIA

Elenchiamo a seguire il riepilogo dei simboli utilizzati nel testo, accompagnati dal loro significato e dalle relative unità di misura nel S.I. (Sistema Internazionale):

v	*velocità lineare*	*(m/s)*
v1i	*velocità iniziale biglia colpitrice (proiettile)*	*(m/s)*
v2i	*velocità iniziale biglia colpita (bersaglio)*	*(m/s)*
v1f	*velocità finale (dopo l'urto) biglia colpitrice*	*(m/s)*
v2f	*velocità finale (dopo l'urto) biglia colpita*	*(m/s)*
vbi	*velocità iniziale della biglia*	*(m/s)*
vpi	*velocità iniziale del pallino*	*(m/s)*
vbf	*velocità finale della biglia*	*(m/s)*
vpf	*velocità finale del pallino*	*(m/s)*
Vb	*velocità della biglia*	*(m/s)*
Vp	*velocità del pallino*	*(m/s)*
Vbf	*velocità finale della biglia*	*(m/s)*
Et	*energia totale*	*(Joule)*
Ep	*energia potenziale dovuta all'altezza di rilascio della biglia*	*(Joule)*
Ec	*energia cinetica dovuta alla velocità lineare*	*(joule)*
Ecb	*energia cinetica dovuta alla velocità lineare della biglia*	*(Joule)*
Erb	*energia cinetica dovuta al rotolamento della biglia*	*(Joule)*
M	*massa della biglia*	*(kg)*
Mb	*massa della biglia*	*(kg)*
Mp	*massa del pallino*	*(kg)*
M1	*massa della biglia colpitrice (proiettile)*	*(kg)*
M2	*massa della biglia colpita (bersaglio)*	*(kg)*
g	*accelerazione di gravità (9,81 m/s^2)*	*(m/s^2)*
H	*altezza di rilascio della biglia*	*(m)*
P	*quantità di moto*	*(kg.m/s)*
J	*Momento d'inerzia di massa della biglia (vedi l'appendice 5.1)*	*($kg.m^2$)*
w	*velocità angolare della biglia (rotolamento specifico)*	*(rad/s)*
R	*raggio della sfera (biglia)*	*(m)*

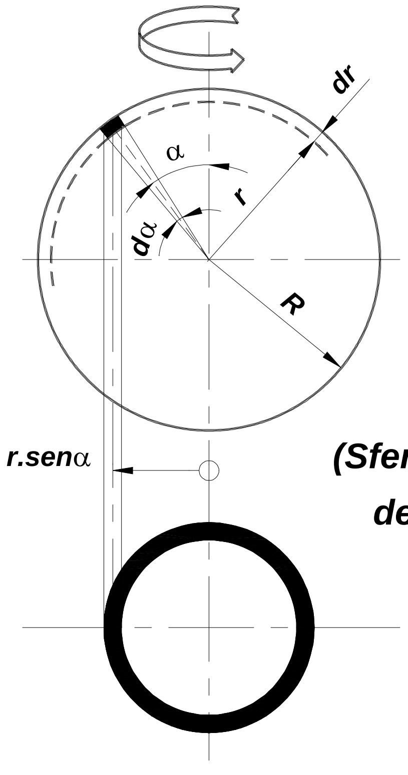
5.1 APPENDICE

Come promesso nel testo, chiariremo il significato del termine **Erb = (½ . J . w ^{2})** *apparso nel capitolo 2.1 a pag.5.*

Questo termine esprime l'energia cinetica associata al moto di rotolamento delle biglie, le quali possono essere identificate con delle sfere rigide ed omogenee; si tratta dell'equivalente del termine **Ecb = (1/2 . M . v^2)** *associato al moto lineare, sviluppato per il moto rotatorio, in funzione delle grandezze fisiche che gli sono caratteristiche:*

- il momento d'inerzia di massa polare ***J*** *(esprime l'inerzia associata al moto rotatorio della biglia)*

- la velocità di rotazione angolare ***w*** *(indica la rapidità della rotazione)*



(Sfera omogenea densità $=\rho$ ***)***

(Fig.5.1)

*Per la sfera il momento d'inerzia (**J**) vale:*

J = 2/5 . M . R ^{2} *dove (**M**) è la sua massa e (**R**) il suo raggio.*

*Nel seguito diamo la dimostrazione dell'espressione appena scritta, con la certezza di non fare assolutamente cosa gradita alla maggior parte dei lettori (**vi avevo avvertito in conclusione del testo**), ma il godimento provato nel portarla a compimento mi impedisce il risparmiarvela.*

*Per definizione il momento d'inerzia di massa polare di un corpo (**J**), è la somma estesa a tutti i suoi punti (**Pi**) dei termini (**mi . ri**^{2}) dove (**mi**) ed (**ri**) sono la massa dell'elemento (**i** esimo) e rispettivamente, la sua distanza dall'asse di rotazione; quindi nel nostro caso, con **rif. alla Fig.5.1** avremo elementi di massa infinitesima (**dm),** giacenti su corone circolari, che hanno tutti la stessa distanza (**r.sen**α) dall'asse e passando agli infinitesimi avremo:*

$$dm = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot sen\alpha \cdot r \cdot d\alpha \cdot dr \cdot \rho = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \rho \cdot sen\alpha \cdot dr \cdot d\alpha$$

$$dJ = dm \cdot r^2 \cdot sen^2\alpha = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot r^4 \cdot sen^3\alpha \cdot dr \cdot d\alpha$$

$$dJ = K \cdot r^4 \cdot sen^3\alpha \cdot dr \cdot d\alpha \qquad \text{dove} \quad K = 2 \cdot \pi \cdot \rho$$

*e **dJ** è l'infinitesimo del momento d'inerzia.*

*Passiamo all'integrale dell'ultima espressione tra i limiti (**R** e **0**) per **R** ; (π e **0**) per α :*

$$J = K \cdot \int_0^R r^4 . dr . \int_0^\pi sen^3\alpha . d\alpha$$

la soluzione del primo integrale è quasi banale:

$$\int_0^R r^4 . dr = \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R = \frac{R^5}{5}$$

mentre la soluzione del secondo è un po' più elaborata:

su $\boxed{\int_0^\pi sen^3\alpha . d\alpha}$ *effettuiamo la seguente sostituzione:* $\boxed{t = -\cos\alpha}$

per ottenere: $\frac{dt}{d\alpha} = sen\,\alpha$; $t^2 = \cos^2\alpha \Rightarrow t^2 = 1 - sen^2\alpha$

$$d\alpha = \frac{dt}{sen\,\alpha} \quad ; \; sen^2\alpha = 1 - t^2$$

da cui per $\alpha = \pi$ $\Rightarrow$*(si ha)* ***t = + 1*** *e per* $\alpha = 0$ $\Rightarrow$ ***t = - 1***

ed operando le opportune sostituzioni:

$$\int_0^{\pi} sen^3\alpha.d\alpha = \int_{-1}^{+1}(1-t^2).dt = \int_{-1}^{+1}dt - \int_{-1}^{+1}t^2.dt = [t]_{-1}^{+1} - \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{+1} = 2-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

per poi riassumere in:

$$J = K.\frac{R^5}{5}.\frac{4}{3} = 2.\pi.\rho.\frac{R^5}{5}.\frac{4}{3}$$ *da cui sostituendo* $$M = \frac{4}{3}.\pi.R^3.\rho$$

la massa della sfera, otteniamo finalmente la:

$$\boxed{J = \frac{2}{5}.M.R^2}$$ *c.v.d. (come volevamo dimostrare)*

1a edizione

Finito di stampare il 30/04/2002