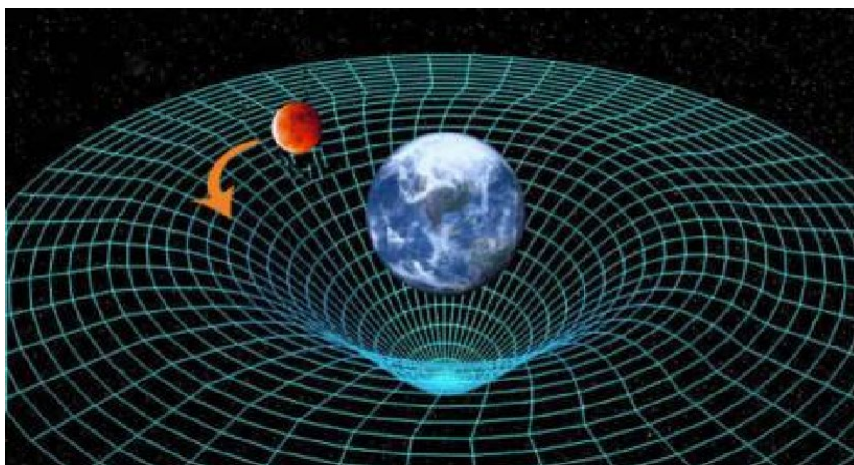
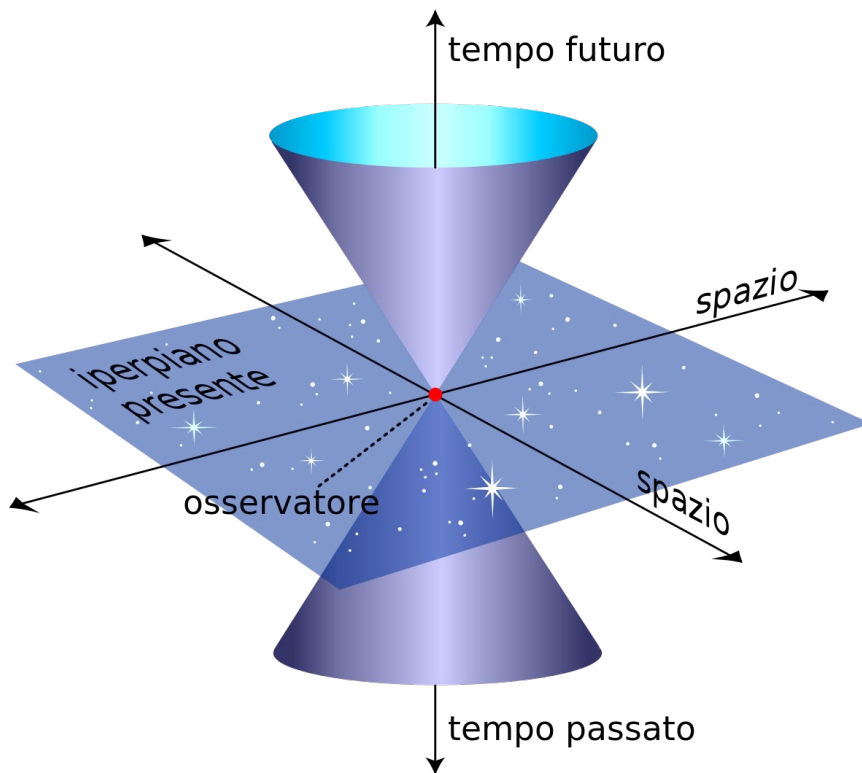


Angelo Montorsi

Lo Spaziotempo

(Appunti di relatività)



INDICE:

<i>Prefazione</i>	<i>pag.3</i>
<i>(1) Un poco di storia</i>	<i>pag.4</i>
<i>(2) Le trasformazioni di Lorentz</i>	<i>pag.8</i>
<i>(3) Lo spaziotempo di Minkowski</i>	<i>pag.11</i>
<i>(4) Il principio di equivalenza</i>	<i>pag.16</i>
<i>(5) Un poco di matematica "I tensori"</i>	<i>pag.18</i>
<i>(6) La geometria differenziale delle superfici</i>	<i>pag.22</i>
<i>(7) Le equazioni di campo di Einstein</i>	<i>pag.32</i>
<i>(8) La soluzione di Schwarzschild</i>	<i>pag.34</i>
<i>(9) Le geodetiche nello spaziotempo e la precessione del perielio di Mercurio</i>	<i>pag.38</i>
<i>10) I buchi neri</i>	<i>pag.42</i>
<i>Bibliografia</i>	<i>pag.45</i>

Appendici:

<i>1 - La contrazione di Lorentz e Fitzgerald</i>	<i>pag.46</i>
<i>2 - Calcolo esplicito di un simbolo di Christoffel</i>	<i>pag.51</i>
<i>3 - Calcolo esplicito del tensore di Ricci (una componente)</i>	<i>pag.53</i>

Lo Spaziotempo

(Appunti di relatività)

Introduzione

Parlare ancora di Spaziotempo, dopo tutto l'inchiostro versato, dalla sua comparsa sulla scena fisica fino ai giorni nostri, può sembrare un inutile spreco, ma confinato in casa per il Covid-19, provo a versarne un poco anch'io.

Qui cercherò di proporre una via alla comprensione delle due teorie relativistiche, destinata a quei lettori, che pur armati di un buon bagaglio matematico, dopo aver letto tanti testi divulgativi, non hanno il tempo o la voglia, di approfondire la tematica sui testi specialistici (destinati per l'appunto agli specialisti). Naturalmente, non eviterò di colorire il testo, con qualche nota storica e farò man bassa dei contenuti pubblicati da altri autori, che si sono cimentati anch'essi in tal senso.

Cercherò nella bibliografia, di rendere loro giustizia, per quanto mi sarà possibile, non me ne voglia chi troverà dei suoi contenuti senza citazione, semplicemente non ricordavo dove li ho presi (su segnalazione sono disposto a rimediare).

Ad un certo punto del percorso di apprendimento della "teoria della relatività speciale", ho creduto di intravedere una soluzione alternativa, (la quale in un primo momento, ho ritenuto originale).

Su questa soluzione, ho versato un poco di inchiostro, incoraggiato dal fatto che un accademico di rilievo il Prof. Franco Selleri (purtroppo ora scomparso) stava battendo la stessa strada.

Resisterò dal fare cenno a questa soluzione, risparmiandola e seguirò i canoni tracciati dalla scienza ufficiale, nel merito delle due teorie relativistiche denominate: "relatività speciale" e "relatività generale", prendendomi solo qualche licenza qua e là (avvertendo quando capita).

Al punto 1 ho tracciato il quadro storico, che ha germinato le due teorie relativistiche. Nel secondo vengono esposte le "Trasformazioni di Lorentz" che sono la base per la "Relatività ristretta" e non solo. Nel terzo parliamo della costruzione matematico-geometrica di Hermann Minkowski lo "spaziotempo". Il quarto è dedicato al "Principio di equivalenza", che è servito ad Albert Einstein come base per generalizzare la sua teoria del 1905 in quella del 1915. Nel punto 5 abbiamo una trattazione sintetica dei "Tensori", gli enti matematico-fisici che hanno permesso di scrivere le leggi fisiche, in modo covariante, valido in tutti i sistemi di riferimento. Il punto 6 è invece dedicato alla geometria differenziale, della quale si è servito Albert Einstein per costruire quella che viene definita come "La più grande espressione del pensiero umano nel XX secolo", cioè la "Teoria generale della relatività". Nel punto 7 viene presentato il risultato dei 10 anni di intensi sforzi, che sono serviti per passare dalla "Relatività speciale" alla "Relatività generale", le "equazioni di campo". Al punto 8 la "Soluzione di Schwarzschild", la prima soluzione analitica delle equazioni di campo, all'interno della quale, verrà più tardi riconosciuta la possibile esistenza dei "buchi neri". Nel punto 9 verranno trattate le geodetiche, cioè le traiettorie nello spaziotempo, che costituiscono il cammino più breve congiungente due punti di una varietà curva e ci portano ad uno dei primi successi della teoria della relatività generale, cioè la spiegazione per la precessione anomala del perielio del pianeta Mercurio. Concluderemo al punto 10 con una descrizione dei "Buchi neri", come una soluzione (singolarità) delle equazioni di campo e non solo. Avverto il lettore, che non si tratterà di una passeggiata e bisognerà armarsi di una buona dose di concentrazione, ma il premio finale, spero ricompenserà ampiamente gli sforzi.

Approfitto dell'occasione, per un ringraziamento ad Albert Einstein, lo scienziato che nei primi anni del XX secolo ci ha donato le due teorie relativistiche: nel 1905 "la speciale" ed alla fine del 1915 dopo 10 anni di intensi sforzi "la generale".

(1) - Un poco di storia

La storia del pensiero scientifico e delle teorie che ne hanno accompagnato e sostenuto l'evoluzione nel corso dei secoli, ci porta ad osservare, come dalle felici intuizioni di pochi uomini geniali, separate a partire da Galilei, all'incirca un secolo l'una dall'altra (circa quattro generazioni), uno stuolo di filosofi naturali, poi scienziati, lavorando su queste intuizioni; con l'aiuto della matematica (evolatasi di pari passo) e di una sperimentazione sempre più sofisticata, ha contribuito nelle varie epoche corrispondenti alla creazione di modelli e spiegazioni, per i fenomeni naturali che osserviamo quotidianamente.

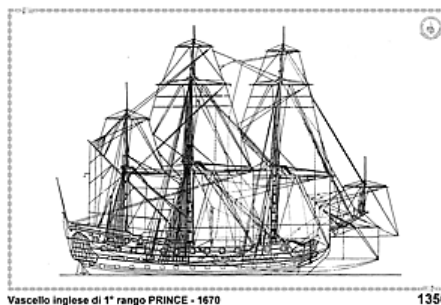
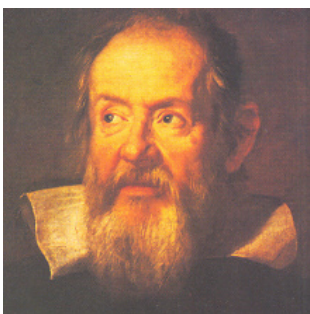
In ogni epoca, fino all'inizio del 1900, l'immagine della realtà fisica che gli uomini potevano costruirsi, aveva una corrispondenza intuitiva con modelli visualizzabili relativamente semplici.

Le cose hanno preso una piega diversa, quando Albert Einstein nel 1905, con la pubblicazione del suo articolo "L'elettrodinamica dei corpi in movimento", concetti radicati, come l'immutabile e regolare scorrere del tempo e la contemporaneità dei fenomeni, divenivano non più oggettivi, ma bensì soggettivi, con lo sfasamento temporale, dovuto alla diversa realtà, vissuta da osservatori in moto relativo.

Cosa era successo, da spingere Albert Einstein a proporre la sua rivoluzione? Era successo che nel 1864 James Clerk Maxwell aveva completato la sua magnifica sintesi sull'elettromagnetismo e le sue equazioni, prevedevano una velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto pari circa a 300.000 km/s (velocità che subito Maxwell riconobbe come la velocità (c) della luce, rivelandone la sua caratteristica di onda elettromagnetica).

Fin qui niente di strano, se non fosse che Galileo Galilei nel suo "Dialogo dei Massimi Sistemi" finito di stampare nel Febbraio del 1632 (che tanti problemi gli creò con l'Inquisizione), aveva enunciato il suo "Principio di relatività" con le seguenti parole:

"Rinserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun grande naviglio, e qui fate d'aver mosche, farfalle e simili animalletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vada versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto abbasso: e stando ferma la nave, osservate diligentemente come quelli animalletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno andar notando indifferentemente per tutti li versi; le stille cadenti entreranno tutte nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le distanze siano eguali; e saltando voi, come si dice, a pie' giunti, eguali spazi passerete verso tutte le parti. Osservate che avete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vascello sta fermo non debbano succedere così, fate muovere la nave con quanta si voglia velocità; che (purché il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, ne da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o sta ferma.



Praticamente Galileo ci diceva che nessun fenomeno può aiutarci nel decidere se la nave è ferma o si sta muovendo di moto rettilineo uniforme, affermando in questo modo che i sistemi di riferimento inerziali sono tra loro equivalenti, nel descrivere le leggi della fisica e questo è in sostanza il "Principio di relatività".

Naturalmente Galileo portava ad esempio gli effetti fisici legati al "Principio d'inerzia" << Ciascun corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo uniforme, eccetto che sia costretto a mutare quello stato da forze impresse>>, ai suoi tempi le conoscenze sui campi elettromagnetici erano ancora da costruire e la formulazione stessa del "Principio d'inerzia" appena riportata è attribuita a Newton suo postero che la enunciò nei suoi "Principia".

La fisica classica presenta una visione dell'Universo le cui proprietà non cambiano al variare del sistema di riferimento inerziale dal quale si osservano i fenomeni fisici.

L'invarianza dei fenomeni così descritta, viene detta "Relatività galileiana", ed un principio che sembrava solido cominciò a vacillare; quando Maxwell con la sua potente sintesi sulle leggi dell' Elettromagnetismo ("le equazioni di Maxwell"), incorporò la luce nel quadro delle onde elettromagnetiche e ricavò il risultato:



$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}}$$

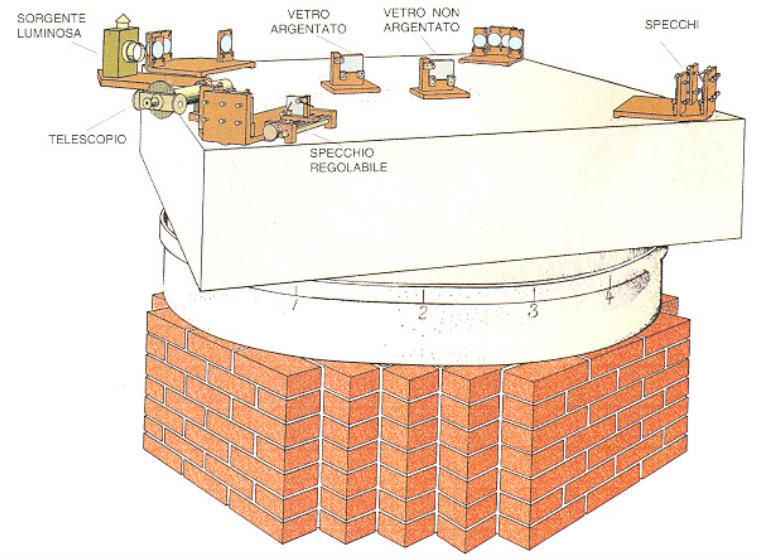
che ne determina la velocità (c) in funzione di due costanti fondamentali di natura, legate al vuoto: la costante dielettrica (ϵ_0) e la permeabilità magnetica (μ_0).

Il principio che divenne vacillante fu proprio il "Principio di relatività", infatti a cominciare dallo stesso Maxwell, si postulò l'esistenza di un sistema di riferimento privilegiato, il quale si potesse considerare a riposo, nel mezzo per la propagazione delle onde elettromagnetiche. Mezzo che fu denominato "Etere" e va detto per inciso che sulla sua esistenza, al tempo non sussistevano dubbi; i dubbi erano al più sulla sua costituzione.

L'equilibrio instabile del "Principio di relatività" era naturalmente da imputare al fatto che almeno per l'elettromagnetismo, non tutti i sistemi di riferimento inerziali, potevano essere considerati equivalenti, dovendo essercene uno privilegiato, in quiete nell'Etere.

Sull' onda di queste ipotesi si idearono vari esperimenti per rivelare il moto del nostro pianeta nei suoi confronti: il più famoso compiuto da Michelson e Morley nel 1887 con metodo interferometrico; nonostante il suo livello di precisione, non riuscì a rivelare il moto della Terra nei confronti dell'Etere.

L'esperimento metteva a confronto due fasci di luce, ottenuti per divisione di un unico fascio, i quali si ricongiungevano dopo aver percorso un cammino di circa 11 metri, in direzioni tra di loro ortogonali.

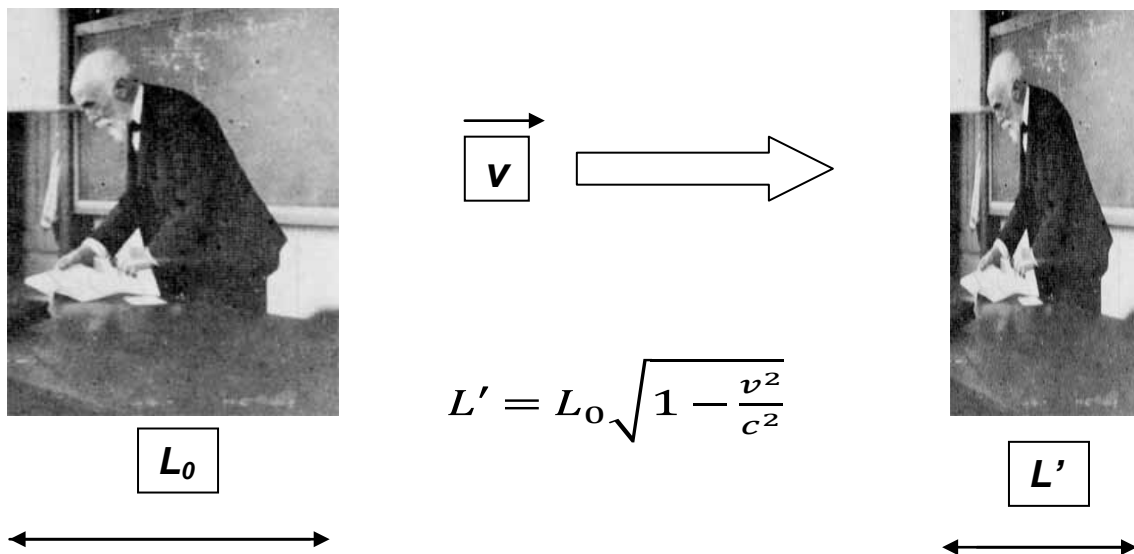


(Michelson) (Morley)

Il risultato dell'esperimento non rivelò differenze tra i due percorsi, prestandosi alla conclusione che: o la terra era immobile nei confronti dell'etere, oppure l'etere non esisteva (vedi appendice 1).

Per i sostenitori della presenza dell'etere rimanevano aperte due ipotesi: la terra nel suo moto trascina l'etere, oppure i corpi subiscono una contrazione lungo la direzione del moto.

Questa contrazione, chiamata di Lorentz e Fitzgerald, è data dalla seguente espressione:



dove (L') è la lunghezza contratta del corpo nella direzione del moto, (L_0) la lunghezza a riposo, (v) la velocità del moto nei confronti dell'etere e (c) la velocità della luce misurata nel vuoto.

In pratica, per maggior chiarezza, se consideriamo che i corpi in movimento subiscono lungo la direzione del moto la contrazione suddetta, il risultato dell'esperimento di Michelson e Morley risulta pienamente giustificato.

In questo clima di incertezza si inserisce il lavoro di Einstein del 1905 (Relatività ristretta) coi postulati:



(Albert Einstein)

Postulato 1: Il moto assoluto uniforme non può essere rivelato

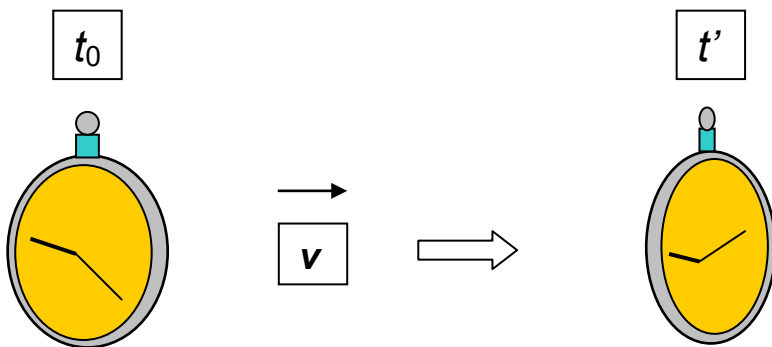
Postulato 2: la velocità della luce, misurata da un osservatore inerziale è indipendente dal moto della sorgente

L'esperimento di Michelson e Morley, viene considerato a suffragio del primo postulato: se non riusciamo ad evidenziare differenze nella velocità della luce, tra due sistemi di riferimento animati da un moto relativo, non possiamo sapere, quale dei due si muova più velocemente e quale più lentamente, rispetto ad un eventuale sistema di riferimento assoluto considerato in quiete.

Da questa considerazione, Einstein ha dedotto che i due sistemi di riferimento sono equivalenti, ridando stabilità al "Principio di relatività" di galileiana memoria, che i risultati di Maxwell avevano reso vacillante.

Come conseguenza della contrazione di Lorentz e Fitzgerald sulla lunghezza dei regoli in movimento e del risultato dell'esperimento di Michelson e Morley si ricava che la relazione tra gli intervalli di tempo, segnati dagli orologi di due osservatori inerziali, deve valere la relazione:

$$t' = t_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (\text{dilatazione dei tempi})$$

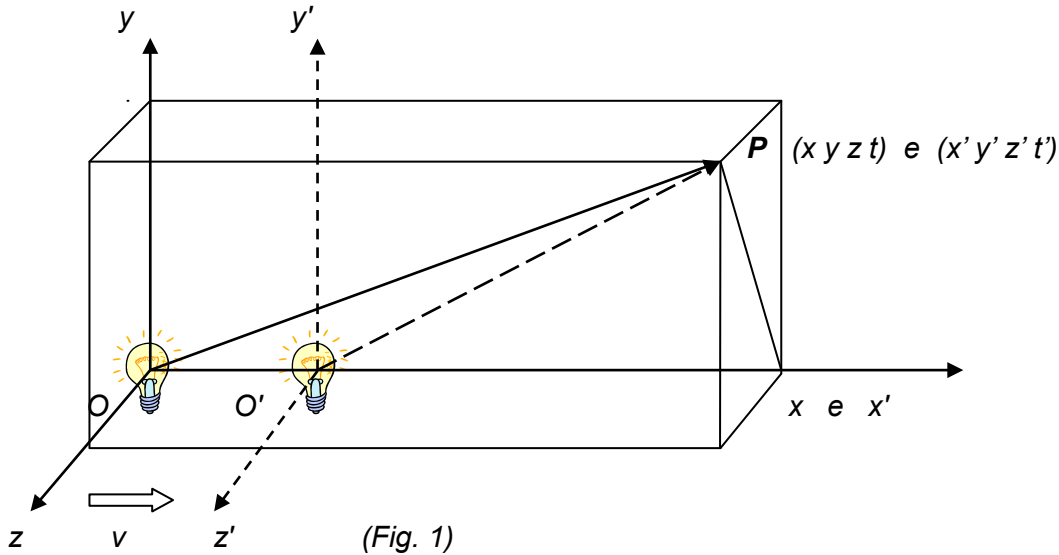


la quale ci dice che il tempo (t') registrato dall'orologio di un osservatore in moto alla velocità (v) risulta minore del fattore $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, rispetto al tempo (t_0) segnato dall'orologio di un osservatore a riposo (le lancette degli orologi in movimento rallentano). Da quanto detto sinora ne segue che un diverso paradigma, si stava imponendo nel confrontare le misure di distanze e di tempi, tra due sistemi di riferimento inerziali, in moto relativo.

Questo paradigma sarà la conseguenza dell'applicazione delle "Trasformazioni di Lorentz", che costituirà l'argomento del prossimo punto.

(2) - Le trasformazioni di Lorentz

Prima dei risultati riportati nel capitolo precedente, se si voleva passare da un sistema di riferimento inerziale ad un altro (per sistema di riferimento inerziale, si intende un riferimento in moto rettilineo a velocità costante non soggetto ad accelerazione), dalla conoscenza delle coordinate (O, x, y, z, t) di un punto (P) nel primo riferimento, si poteva passare alla conoscenza delle coordinate (O', x', y', z', t') che ne descrivevano la posizione nell'altro sistema, applicando le seguenti relazioni, chiamate "Trasformazioni di Galileo":



Trasformazioni dirette

$$x' = x - v \cdot t$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

Trasformazioni inverse

$$x = x' + v \cdot t'$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

$$t = t'$$

ottenute, ipotizzando la stessa lunghezza dei regoli nei due riferimenti e lo scorrere universale ed assoluto del tempo.

Ma come abbiamo visto in precedenza, queste due ipotesi non erano più valide e si doveva fare i conti con la contrazione di Lorentz e Fitzgerald:

$$L' = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

e la conseguente dilatazione dei tempi:

$$t' = t_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

(facciamo attenzione al fatto che t e t' sono le indicazioni date dalle lancette dei due orologi, non le durate degli eventi, le quali vanno ragionate in senso opposto. Un orologio rallentato segna un tempo inferiore per un evento che è durato di più). Ora proporrò una derivazione delle "Trasformazioni di Lorentz" poco ortodossa, la quale non rispecchia sicuramente il percorso seguito da Lorentz per ricavarle; la quale però a mio parere, ha il pregio di evidenziare meglio gli effetti fisici in gioco.

Con riferimento alla (Fig.1), dove è rappresentata la disposizione standard dei due sistemi di riferimento (la quale semplifica i ragionamenti sulle coordinate y e z), immaginiamo che al tempo ($t=0$) per l'osservatore (O) e ($t'=0$) per l'osservatore (O') i due sistemi di riferimento inerziali siano sovrapposti (con le origini in comune e gli assi omologhi equiversi), mentre il sistema (O',x',y',z',t') trasla con velocità (v) rispetto al sistema (O,x,y,z,t).

Fatta questa posizione, vediamo come si trasformano le coordinate (x,y,z,t) del punto P nelle omologhe (x',y',z',t') del sistema traslante, iniziamo dalla (x), la quale si ricava dalla trasformazione galileiana:

$x' = x - v \cdot t$ applicandovi la contrazione di Lorentz e Fitzgerald al denominatore (questo perchè x' e x indicano le misure effettuate nei due sistemi, con i loro regoli campione, ed il regolo di (O') risulta contratto) per ottenere la:

$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ mentre le altre due coordinate spaziali, causa il loro orientamento non subiscono la

contrazione e per loro avremo:

$$y' = y \quad e \quad z' = z$$

Per la coordinata temporale (t) il ragionamento è un poco più articolato.

Allo scopo, proviamo ad immaginare che al tempo (t) per l'osservatore (O), un lampo di luce inviato dall'origine illumini il punto (P) di coordinate (x) per (O) e (x') per (O').

Osserviamo, che il raggio di luce, impiega un tempo: (x/c) per raggiungere ed illuminare il punto (P), durante il quale l'origine (O') ha percorso lo spazio: [$(x/c) \cdot v$], distanza che viene percorsa dalla luce nell'intervallo di tempo:

$\frac{x}{c} \cdot v = \frac{v}{c^2} \cdot x$ sottraendo questo intervallo a (t), otteniamo il tempo (misurato nel sistema di (O)) che la luce impiega a raggiungere il punto (P), partendo dall'origine (O') ed applicando la dilatazione dei tempi al denominatore,

otteniamo la trasformazione del tempo: $t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

A questo punto, per ottenere le trasformazioni inverse, in ottica relativistica, basta sostituire nelle formule ($-v$) al posto di (v) ed il gioco è fatto [perchè per l'osservatore (O'), è l'osservatore (O) che si muove con velocità ($-v$)].

Riepiloghiamo nel seguito questi risultati:

Trasformazioni dirette

$$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y \quad ; \quad z' = z \quad ; \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Trasformazioni inverse

$$x = \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y = y' \quad ; \quad z = z' \quad ; \quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} \cdot x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Queste trasformazioni, erano già note al tempo, nel quale Einstein pubblicò il suo articolo del 1905, ma egli le ritrovò come risultato dell'applicazione dei suoi due postulati.

Da queste Einstein ricavò una messe di risultati e nel seguito presento un breve elenco, di quelli che ritengo essere i più noti ed importanti:

a) La relatività della simultaneità tra diversi osservatori dello stesso evento.

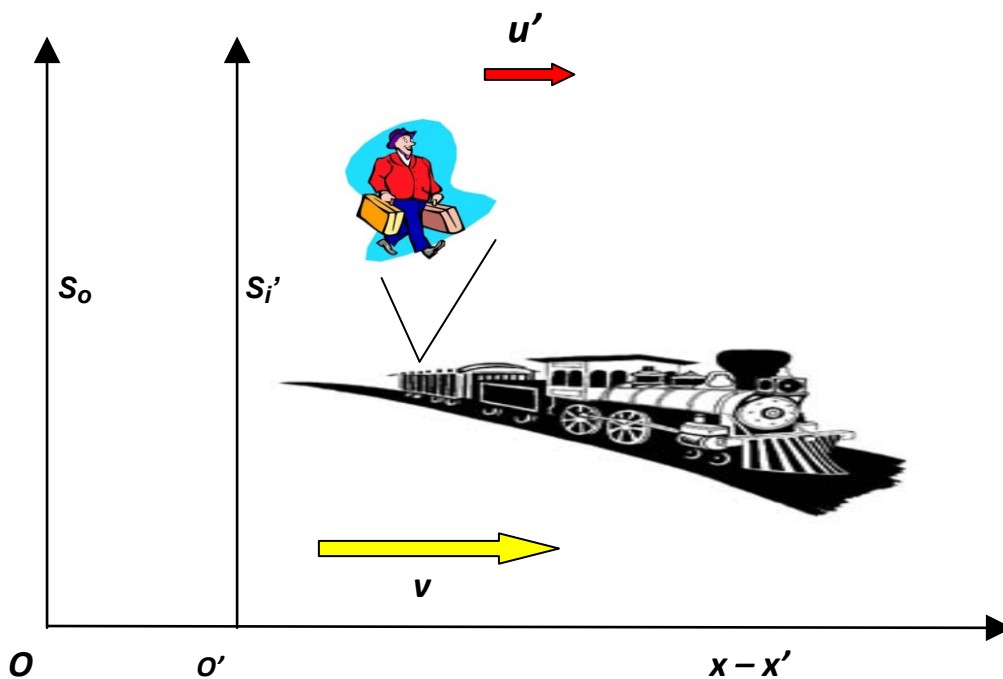
b) L' invarianza delle equazioni di Maxwell per applicazione delle trasformaz. (già ottenuta da Lorentz e Poincarè)

c) L' equivalenza massa-energia, con la famosa: $E = m \cdot c^2$

d) Il contributo cinetico alla massa dei corpi: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

e) Il limite superiore (c) per tutte le velocità dei corpi [(con Rif. alla (Fig.2)]:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u' \cdot v}{c^2}}$$



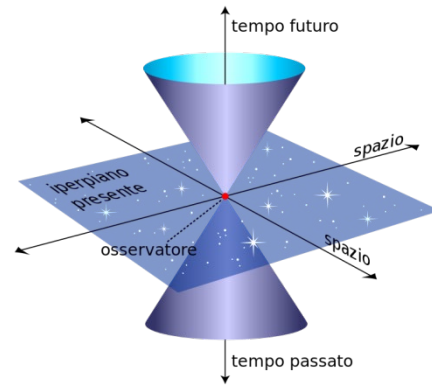
(Fig.2)

La quale anche per ($v=c$) restituisce ($u = c$) per qualunque velocità (u').

(3) - Lo Spaziotempo di Minkowski



Hermann Minkowski (1864-1909)



" D'ora in poi lo spazio di per se stesso e il tempo di per se stesso sono condannati a svanire in pure ombre, e solo una specie di unione tra i due concetti conserverà una realtà indipendente "

Hermann Minkowski, un ex insegnante di Albert Einstein, con la sua idea di "spaziotempo" ha dato una sistematizzazione matematico-geometrica, all'ambiente dei fenomeni relativistici, costruendo uno spazio, spesso indicato con (M^4) , che assegna ad ogni evento, che avviene al tempo (t) nel punto spaziale (x,y,z) , il quadrivettore di componenti (x_0, x_1, x_2, x_3) con la seguente convenzione: $x_0=ct$; $x_1=x$; $x_2=y$; $x_3=z$ e dotato di un prodotto scalare così definito:

$$\langle (x_0, x_1, x_2, x_3), (y_0, y_1, y_2, y_3) \rangle = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 \quad (3.1)$$

dove i due vettori: (x_0, x_1, x_2, x_3) e (y_0, y_1, y_2, y_3) rappresentano due eventi spaziotemporal, tra i quali viene definita un "distanza o intervallo spaziotemporale" :

$$d^2 = (x_0 - y_0)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2$$

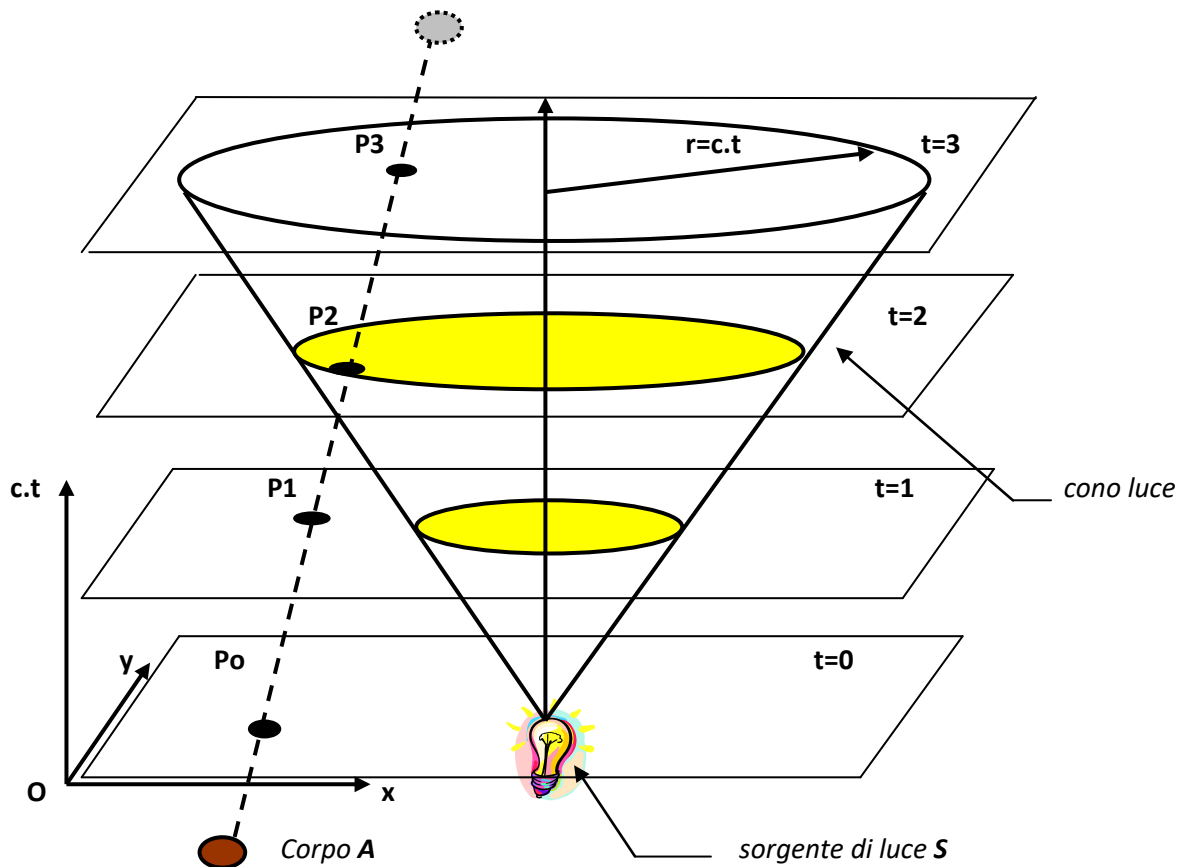
oppure in modo equivalente:

$$d^2 = (ct_x - ct_y)^2 - (x_x - x_y)^2 - (y_x - y_y)^2 - (z_x - z_y)^2 \quad (3.2)$$

sulla falsariga della distanza euclidea tra due punti nello spazio euclideo; però col segno cambiato per le componenti spaziali. In virtù di questa variante, lo spaziotempo di Minkowski viene denominato "pseudoeuclideo".

La caratteristica saliente della distanza (d^2) così definita è quella di essere Lorentz invariante, nel senso che mantiene lo stesso valore, in tutti i sistemi di riferimento inerziali, ottenuti passando da uno all'altro con "Trasformazioni di Lorentz". La geometria così definita, unita alla matematica del "Calcolo differenziale assoluto", sviluppato a partire da : Gauss, Riemann, Ricci Curvastro e Tullio Levi Civita, tornerà utile ad Albert Einstein, per lo sviluppo della sua successiva e straordinaria creazione, la "Teoria generale della relatività", dove lo spaziotempo di Minkowski, "localmente piatto" (approfondirò successivamente il concetto), si potrà a più larga scala "incurvare", sotto l'effetto della presenza di "massa ed energia", risultando questa "incurvatura" come effetto del campo gravitazionale, il quale risultava escluso dalla prima teoria "speciale" del 1905 (la cui validità era limitata ai "Sistemi di riferimento Inerziali"), rendendo "generale" la teoria nel 1915 (valida per ogni Sistema di riferimento, anche per quelli accelerati).

Per dare una visualizzazione grafica dello spaziotempo di Minkowski, sacrifichiamo una dimensione spaziale e limitiamo le nostre considerazioni, ad eventi che hanno luogo su di un piano (O,x,y) .



Nella figura i piani orizzontali sono il luogo degli eventi che avvengono simultaneamente, essendo ognuno di essi la rappresentazione dell'equazione: $(t = \text{costante})$.

Con questa rappresentazione si può dare un'immagine intuitiva dell'universo, dove i piani orizzontali rappresentano strati di punti universo simultanei, mentre le linee verticali formano fibre di punti universo di eventi che avvengono nello stesso luogo o posizione (punti statici che non cambiano la loro posizione col trascorrere del tempo).

Ogni punto di intersezione tra le fibre verticali e gli strati orizzontali, rappresenta un punto che si può localizzare con le solite coordinate spaziali (x,y,z) ed una coordinata temporale (t) , ad esempio per i punti **P0**, **P1**, **P2**, **P3**, sulla traiettoria percorsa dal corpo (A), possiamo usare la notazione: $\mathbf{P0}(x_0,y_0,z_0,t_0)$; $\mathbf{P1}(x_1,y_1,z_1,t_1)$; $\mathbf{P2}(x_2,y_2,z_2,t_2)$; $\mathbf{P3}(x_3,y_3,z_3,t_3)$ rispettivamente.

La traiettoria del corpo (A) nello spaziotempo, viene chiamata la sua **linea di universo**, e se il corpo è in movimento (rettilineo uniforme), per quanto detto sul significato delle rette verticali, questa sarà sempre una linea più o meno inclinata rispetto alla verticale.

A questa linea di universo, appartengono tutti e soltanto i punti dello spaziotempo successivamente occupati dal corpo (**P0**, **P1**, **P2**, **P3**), quindi due corpi si incontrano solo se le loro linee di universo si incontrano in qualche punto dello spaziotempo.

Sempre nella figura abbiamo rappresentato una sorgente luminosa (S) che viene accesa all'istante $(t=0)$ e come vediamo; agli istanti successivi: $(t=1)$, $(t=2)$, $(t=3)$, la zona illuminata interessa sempre più punti dello

spaziotempo, (i punti all'interno delle circonferenze) e con un piccolo sforzo supplementare (aggiungendo la terza dimensione spaziale (z)), possiamo pensare questi cerchi come sfere, il cui raggio è dato dalla relazione:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{ma anche dalla} \quad r = c \cdot t \quad (3.3)$$

Se noi introduciamo questi valori nella relazione (3.2) otteniamo l'**intervallo spazio-temporale**: tra l'evento rappresentato dall'accensione della sorgente luminosa (S), ed i punti dello spazio, successivamente raggiunti dai suoi raggi luminosi.

Per come sono definite le relazioni (3.3), gli intervalli temporali che possiamo ottenere dalla (3.2), sono tutti nulli ed i punti giacciono (nella nostra rappresentazione semplificata) sulle circonferenze disegnate sui vari piani; definendo quello che viene solitamente chiamato: **cono luce** di questo evento.

Esaminando la relazione (3.2) vediamo che l'**intervallo spazio temporale** può assumere i seguenti valori:

- $d^2 = 0$ sulla superficie del cono luce (e viene definito: **intervallo di tipo luce**)
- $d^2 > 0$ interno alla superficie del cono luce (" : **intervallo di tipo tempo**)
- $d^2 < 0$ esterno alla superficie del cono luce (" : **intervallo di tipo spazio**)

Per il primo ed il secondo caso, ad esempio i punti ($P2$ e $P3$) della traiettoria del corpo (A) in relazione al punto (S) di accensione della lampada, si può dire: che gli eventi separati da tali intervalli, possono essere in relazione causa-effetto.

Nel nostro esempio, questa relazione può essere rappresentata, dall'illuminazione del corpo (A) nell'istante in cui entra nel cono luce dell'evento: **accensione della sorgente luminosa (S)**.

L'**intervallo spaziotemporale (d^2)** da considerare in questo esempio è quello tra l'evento, rappresentato dal superamento della superficie del cono luce da parte del corpo (A) nel punto ($P2$) e l'evento accensione della lampada, nel punto spazio temporale $S(x_s, y_s, z_s, 0)$, cioè:

$$d^2 = c^2(t_2 - 0)^2 - (x_2 - x_s)^2 - (y_2 - y_s)^2 - (z_2 - z_s)^2 = 0$$

Per il terzo caso ($d^2 < 0$), ad esempio i punti ($P0$ e $P1$) sempre in relazione al punto (S) di accensione della lampada, gli eventi separati da questo tipo di intervallo non possono in alcun modo influenzarsi l'un l'altro con relazioni di causa-effetto, in nessun sistema di riferimento, anche se la comunicazione tra gli eventi fosse realizzata alla velocità (c) della luce.

Questo equivale a dire che il corpo (A) quando si trova nei punti spazio-temporali ($P0$ e $P1$) non potrà mai essere testimone dell'accensione della lampada (S) e non potrà mai, per esempio: impedirne l'accensione (naturalmente nell'ipotesi che l'interruttore si trovi nelle vicinanze della lampada e la linea elettrica che lo alimenta non passi nelle vicinanze dei punti $P0$ e $P1$).

Se a questo punto della trattazione, andiamo a considerare eventi che accadono a distanze temporali e spaziali piccolissime, possiamo adottare il formalismo della geometria differenziale per l'intervallo spazio temporale, scrivendo:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (3.4)$$

e come abbiamo già detto in precedenza, questo intervallo è un invariante, tra tutti i sistemi di riferimento inerziali per trasformazioni di coordinate, ottenute con le "Trasformazioni di Lorentz".

La nozione di spaziotempo si presta allo sviluppo di un formalismo, adatto alla rappresentazione delle leggi fisiche e la loro invarianza per "Trasformazioni di Lorentz". Si cercherà di rappresentarle con enti matematici, che diano alle equazioni una forma tale, che rimanga invariante nel passare da un SRI (Sistema di Riferimento Inerziale) ad un altro. Questi enti sono i "Quadrivettori".

Un quadrivettore \mathbf{S} è un insieme di quattro grandezze (S_0, S_x, S_y, S_z) che si trasformano nel passaggio da un SRI ad un altro, come le coordinate (ct, x, y, z) , inoltre il quadrato del loro modulo è calcolato con la seguente convenzione:

$$S^2 = S_0^2 - S_x^2 - S_y^2 - S_z^2$$

Le componenti (ct, x, y, z) di un punto P nello spaziotempo sono le componenti di un quadrivettore il quale identificheremo con \mathbf{P} e partendo da esso, definiremo i due quadrivettori: \mathbf{V} della velocità ed \mathbf{A} dell' accelerazione.

Osserviamo che se la variazione delle coordinate spaziali (x, y, z) di un punto nel sistema di riferimento \mathbf{K} nel tempo (dt) , sono: (dx, dy, dz) , lo spostamento risulta descritto dall' intervallo: $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ mentre nel sistema \mathbf{K}' istantaneamente comovente con il punto in esame, l'intervallo è dato da: $ds'^2 = c^2 dt'^2$ perchè in quel riferimento saranno nulle le variazioni delle componenti spaziali.

Dall' invarianza $(ds^2 = ds'^2)$ ne segue: $ds^2 = c^2 dt'^2$ (3.5)

(dt') è "l' intervallo di tempo proprio", cioè l' intervallo di tempo tra due eventi che accadono nello stesso punto dello spazio tridimensionale e la sua invarianza è garantita dalla (3.5) essendolo (ds^2) ; lo chiameremo $(d\tau)$ e per esso vale la relazione:

$$d\tau = dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} dt \quad \text{dove :} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

da non confondere con: $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ dove (V) è la velocità relativa dei due SRI, mentre (v) è la velocità tridimensionale del punto P .

Siamo ora in grado di definire il "quadrivettore velocità" come: $\mathbf{V} = d\mathbf{P}/d\tau$

ed esplicitiamo le quattro componenti:

$$V_0 = c dt/d\tau = c dt/(1/\gamma dt) = \gamma c$$

$$V_1 = dx/d\tau = dx/(1/\gamma dt) = \gamma v_x \quad \text{essendo } (v_x = dx/dt) \text{ la componente secondo } (x) \text{ della velocità } (v)$$

$$V_2 = dy/d\tau = dy/(1/\gamma dt) = \gamma v_y \quad \text{essendo } (v_y = dy/dt) \text{ la componente secondo } (y) \text{ della velocità } (v)$$

$$V_3 = dz/d\tau = dz/(1/\gamma dt) = \gamma v_z \quad \text{essendo } (v_z = dz/dt) \text{ la componente secondo } (z) \text{ della velocità } (v)$$

con queste posizioni, il "quadrivettore velocità", possiamo rappresentarlo così:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}(\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z)$$

Se prendiamo le Trasformazioni di Lorentz e le riscriviamo, ponendo: $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ otteniamo:

$$x' = \Gamma \left(x - \frac{V}{c} ct \right) \quad y' = y \quad z' = z \quad ct' = \Gamma \left(ct - \frac{V}{c} x \right)$$

e siccome le componenti omologhe dei quadrivettori, trasformano secondo questo schema, avremo:

$$\gamma'v'_x = \Gamma\left(\gamma v_x - \frac{v}{c}\gamma c\right)$$

$$\gamma'v'_y = \gamma v_y$$

$$\gamma'v'_z = \gamma v_z$$

$$\gamma'c = \Gamma\left(\gamma c - \frac{v}{c}\gamma v_x\right)$$

dall'ultima di queste possiamo ricavare: $\gamma/\gamma' = \frac{1}{\Gamma(1-v_x \frac{v}{c^2})}$

la quale sostituita nelle prime tre, ci restituisce:

$$v'_x = \frac{v_x - v}{1 - v_x \frac{v}{c^2}}$$

$$v'_y = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - v_x \frac{v}{c^2}} v_y$$

$$v'_z = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - v_x \frac{v}{c^2}} v_z$$

Passiamo ora a definire il "Quadrivettore accelerazione", come:

$$\mathbf{A} = d\mathbf{V}/d\tau$$

Le sue componenti sono:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A} \left[\gamma \frac{d(\gamma c)}{dt}, \gamma \frac{d(\gamma v_x)}{dt}, \gamma \frac{d(\gamma v_y)}{dt}, \gamma \frac{d(\gamma v_z)}{dt} \right]$$

e sviluppando i calcoli otteniamo:

$$A_0 = \frac{1}{c} \cdot \frac{v\dot{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \quad (\text{con: } \dot{v} \text{ la derivata } dv/dt)$$

$$A_\alpha = \frac{\dot{v}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{v\dot{v}}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^2} \cdot v_\alpha \quad (\text{con } \alpha = 1, 2, 3)$$

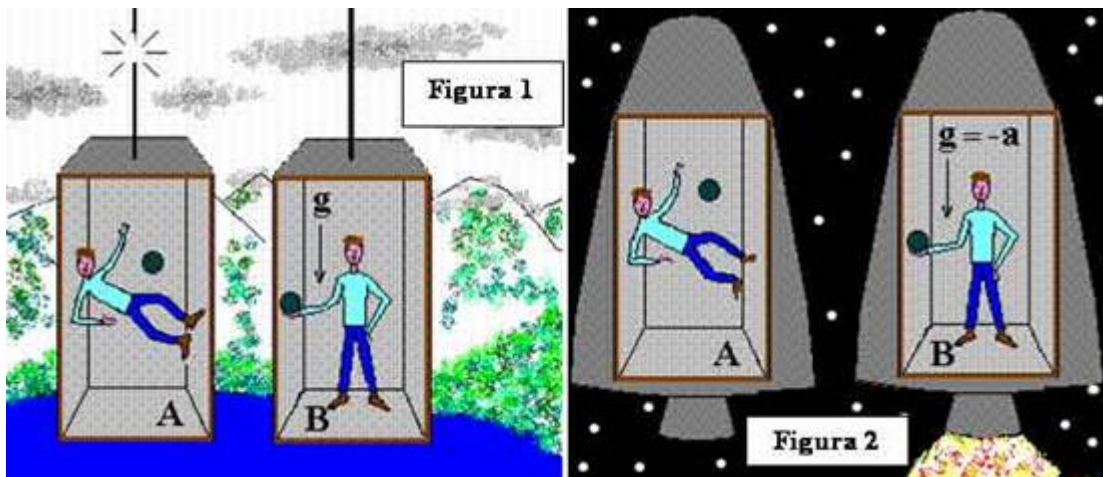
Osserviamo che le componenti del "quadrivettore accelerazione" risultano tutte nulle, quando il moto della particella è rettilineo uniforme ($v_{,t} = dv/dt = 0$) e che nel SRI istantaneamente comovente con la particella ($v=0$) la componente temporale è nulla e le tre componenti spaziali, coincidono con quelle tridimensionali. Da questo si evince, che il modulo quadrato del quadrivettore accelerazione, coincide con il quadrato del modulo della accelerazione tridimensionale, calcolato nel sistema di riferimento istantaneamente comovente con la particella.

(4) - Il principio di equivalenza

Dal punto di vista della meccanica classica, un sistema di riferimento, situato in un campo gravitazionale uniforme è meccanicamente equivalente a un sistema di riferimento uniformemente accelerato.

Secondo il principio di equivalenza di Einstein, che è uno dei due principi fondamentali della teoria della relatività generale, i due sistemi sono fisicamente equivalenti, cioè tutti i processi fisici si svolgono nei due sistemi seguendo le stesse leggi.

Alla base del principio di equivalenza c'è il fatto fondamentale che il campo gravitazionale imprime localmente a tutti i corpi la stessa accelerazione.



Quello che vediamo nelle due Fig.1 e Fig.2 illustra chiaramente situazioni sperimentali equivalenti. E' impossibile, per chi si trova nelle due situazioni (B), distinguere se ci si trova fermi, sotto l'effetto di un campo gravitazionale, oppure in assenza di gravità, ma in un sistema accelerato verso l'alto con accelerazione ($g=-a$), infatti se lasciamo cadere gli oggetti che abbiamo in mano, questi cadono verso il pavimento della cabina, accelerati allo stesso modo.

Le altre due situazioni equivalenti, sono quelle rappresentate con (A) nelle Fig.1 e Fig.2 dove un ascensore in caduta libera, simula un'assenza di gravità, come se fossimo su di una navicella spaziale con i razzi spenti.

In questi due casi gli oggetti attorno a noi, restano sospesi a mezz'aria e fluttuano nell'ambiente, come vediamo dalle immagini che ci arrivano dalla Stazione Spaziale Internazionale (ISS).

Oltre alle considerazioni che abbiamo appena svolto, c'è un altro aspetto da considerare. Il principio di relatività ristretta, postula la completa equivalenza solo per i sistemi di riferimento inerziali. La spiegazione di questa limitazione, risiede nel fatto, che nei sistemi accelerati, appaiono le forze fittizie. La comparsa di queste forze non si può attribuire ad alcun oggetto particolare, sembra indipendente dai moti relativi e quindi dovuta alla stessa accelerazione nei confronti dello spazio. Newton aveva usato il famoso esempio del secchio d'acqua rotante, per provare l'esistenza di questi effetti non relativi ad oggetti particolari e quindi "assoluti".

Einstein dall'indicazione empirica, che la massa gravitazionale e quella inerziale sono equivalenti (grazie agli esperimenti di Eötvös), giunse comunque alla conclusione che tutti i sistemi di riferimento, anche se accelerati, sono equivalenti per la formulazione delle leggi fisiche.

Per chiarire meglio il concetto, in formule abbiamo: le due leggi di Newton $F = m_i a$ e $F = G \frac{m_1 g \cdot m_2 g}{r^2}$, la prima la legge della forza e la seconda della gravitazione universale. Ebbene sperimentalmente per tutti i corpi abbiamo: $m_i = m_g$, cioè la massa inerziale è uguale alla massa gravitazionale.

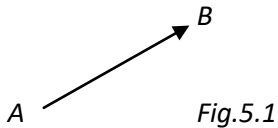
Da quanto detto, all'enunciato "un campo gravitazionale uniforme è equivalente ad un sistema di riferimento accelerato" il passo è breve e secondo il principio di equivalenza così formulato, possiamo descrivere localmente un campo gravitazionale qualunque, rappresentandolo con un sistema di riferimento accelerato. Questa descrizione non essendo in termini di forze, trasforma la fisica della gravitazione in geometria.

Questa è la base concettuale della relatività generale.

Ma da queste idee alla formulazione della nuova teoria, il passo non era così breve ed il nostro Albert, ad un certo punto, chiese disperatamente l'aiuto del suo amico matematico Marcel Grossmann, il quale lo instradò verso quella parte della geometria, che tratta gli spazi curvi e per affrontare la quale, nel prossimo punto, proverò a fornire gli strumenti di base, adatti per affrontare questa impresa.

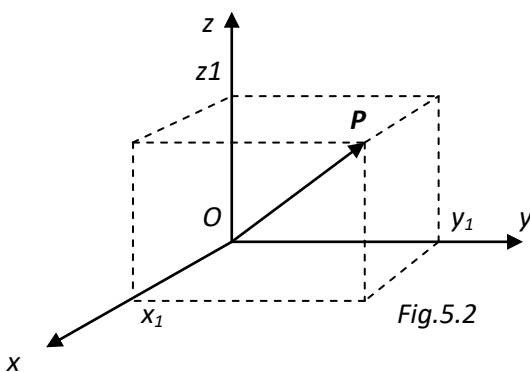
(5) - Un poco di matematica "i tensori"

Nel mondo fisico, abbiamo a che fare, con grandezze, che si possono esprimere con un numero, seguito dalla sua unità di misura (es.: 25 °C la temperatura) chiamate **grandezze scalari** ed altre che per essere completamente definite, richiedono di specificare: intensità o modulo - direzione lungo la quale avviene un'azione - ed un verso su questa direzione; ebbene queste sono le **grandezze vettoriali**, solitamente rappresentate con una freccia (es.: lo spostamento di un punto; la velocità; l'accelerazione). Solitamente le grandezze vettoriali, vengono rappresentate con un segmento orientato, per esempio il segmento \overline{AB} della Fig.5.1:



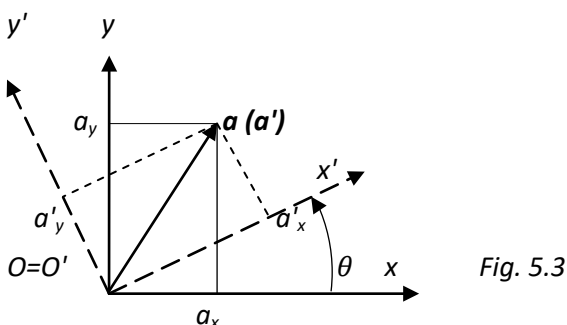
dove la lunghezza rappresenta l'intensità del fenomeno rappresentato, mentre la forma della freccia indica l'orientamento ed il verso, secondo i quali il fenomeno agisce. Ogni altro segmento orientato ottenuto, trasportando questo in modo parallelo, rappresenta lo stesso vettore.

Nello spazio euclideo tridimensionale, il vettore può essere rappresentato, in un sistema di assi cartesiani ortogonali, da tre numeri, i quali sono le sue componenti (Fig.5.2):



e scriviamo $\mathbf{P-O} = (x_1, y_1, z_1)$.

Vediamo nel seguito, cosa succede quando vogliamo rappresentare lo stesso vettore, da un sistema di riferimento nel quale ha la rappresentazione $\mathbf{a} = \mathbf{a}(a_x, a_y)$ (per semplicità ci limitiamo a lavorare nel piano), ad un sistema di riferimento, posto nella stessa origine, ma ruotato dell'angolo θ in senso antiorario (Fig. 5.3):



per ottenere la nuova rappresentazione: $\mathbf{a}' = \mathbf{a}'(a'_x, a'_y)$

avremo: $a'_x = a_x \cos \theta + a_y \sin \theta$

$a'_y = -a_x \sin \theta + a_y \cos \theta$

che possiamo compendiare nel seguente modo:

$$a'_i = \sum_{k=x}^y \alpha_i^k a_k \quad (i=x,y) \quad (5.1) \quad \alpha_x^x = \cos \theta \quad \alpha_x^y = \sin \theta$$

$$\alpha_y^x = -\cos \theta \quad \alpha_y^y = \cos \theta$$

i coefficienti α_i^k sono i coseni direttori che individuano le direzioni degli assi accentati (x' e y') rispetto agli assi (x e y). La seguente espressione generalizza la (5.1) nello spazio tridimensionale:

$$a'_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_i^k a_k \quad (i=1,2,3) \quad (5.2)$$

Osserviamo che un vettore (\mathbf{a}) potrebbe anche definirsi, come un ente individuato da 3 quantità scalari a_i ($i=1,2,3$) le quali al cambiare del sistema di riferimento cartesiano, mutano in conformità della (5.2).

Consideriamo ora un ente costituito dall'insieme di 3 vettori \mathbf{T}_i ($i=1,2,3$) i quali nel passaggio dal riferimento cartesiano ortogonale X_i al riferimento pure cartesiano ortogonale \bar{X}_i mutino con la stessa legge (5.2) con la quale mutano le componenti di un vettore. Un ente tale dicesi **tensore doppio** .

L'insieme di 3 vettori ($\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3$) costituisce dunque un tensore doppio se, cambiando il riferimento cartesiano ortogonale, i tre vettori dell'insieme si trasformano in conformità della legge seguente:

$$\bar{\mathbf{T}}_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_i^j \mathbf{T}_j = \alpha_i^1 \mathbf{T}_1 + \alpha_i^2 \mathbf{T}_2 + \alpha_i^3 \mathbf{T}_3 \quad (i = 1,2,3) \quad (5.3) \quad \text{ed esplicitamente:}$$

$$\bar{\mathbf{T}}_1 = \alpha_1^1 \mathbf{T}_1 + \alpha_1^2 \mathbf{T}_2 + \alpha_1^3 \mathbf{T}_3$$

$$\bar{\mathbf{T}}_2 = \alpha_2^1 \mathbf{T}_1 + \alpha_2^2 \mathbf{T}_2 + \alpha_2^3 \mathbf{T}_3$$

$$\bar{\mathbf{T}}_3 = \alpha_3^1 \mathbf{T}_1 + \alpha_3^2 \mathbf{T}_2 + \alpha_3^3 \mathbf{T}_3$$

L'importanza che presentano queste leggi è legata prevalentemente a ragioni di carattere fisico e per ora andiamo a delineare, alcune proprietà dei tensori. In primo luogo si osservi che un **tensore doppio** si può rappresentare, anziché mediante i 3 vettori \mathbf{T}_i ; attraverso il sistema **doppio** di scalari T_{ik} ($i, k = 1,2,3$) costituito dalle 9 componenti dei tre vettori \mathbf{T}_i circostanza che giustifica la denominazione di **tensore doppio** attribuito all'ente poco sopra definito. La nozione di tensore doppio è facilmente generalizzabile. Come si è passati dalla nozione di vettore a quella di tensore doppio; imponendo all'insieme di 3 vettori \mathbf{T}_i di ubbidire, al cambiare del riferimento alla stessa legge, alla quale ubbidiscono le componenti di un vettore; si passa alla nozione di **tensore triplo** , imponendo all'insieme di 9 vettori \mathbf{T}_{ik} ($i, k = 1,2,3$) di mutare al cambiare del riferimento secondo la legge (5.3), per dedurre poi che un tensore triplo si può rappresentare attraverso il sistema triplo di scalari T_{ikh} ($i, k, h = 1,2,3$).

In modo analogo vengono definiti i tensori quadrupli, quintupli, ecc.

Dicesi propriamente **ordine** o **rango** di un tensore il numero degli indici posseduto dalle sue componenti scalari. Se (n) indica il rango, (3^n) è manifestatamente (in uno spazio tridimensionale), il numero delle componenti del tensore ed osserviamo che i tensori di rango zero e di rango uno, si identificano rispettivamente con gli scalari (invarianti) e con i vettori.

Aggiungiamo altre due definizioni: un tensore doppio $\mathbf{T}_{i,k}$ ($i, k = 1,2,3$) dicesi **simmetrico** se le sue componenti verificano la condizione: $T_{ik} = T_{ki}$ per tutti i valori di ($i, k = 1,2,3$). Le componenti significative di un **tensore doppio simmetrico** sono quindi soltanto 6: $T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{12} = T_{21}, T_{13} = T_{31}, T_{23} = T_{32}$. L'altra definizione è questa: un tensore doppio $\mathbf{T}_{i,k}$ ($i, k = 1,2,3$) dicesi **emisimmetrico** , se le sue componenti verificano la condizione:

$$T_{ik} = -T_{ki} \quad (i, k = 1,2,3) \quad (5.4)$$

dalla (5.4) discende che:

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0, \quad T_{21} = -T_{12}, \quad T_{31} = -T_{13}, \quad T_{32} = -T_{23}$$

quindi le componenti significative di un **tensore doppio emisimmetrico** sono solo 3.

Vediamo ora, che tra i tensori si può definire **un'algebra tensoriale** con le operazioni di:

a) **Eguaglianza:** definita solo tra tensori dello stesso ordine, due tensori A_{ik} e B_{ik} si dicono uguali se:

$$A_{ik} = B_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad \text{cioè sono uguali tutte le componenti che hanno gli stessi indici.}$$

b) **Somma e differenza:** definite anche queste solo tra tensori dello stesso ordine. Per due tensori A_{ik} e B_{ik} definiamo la somma e la sottrazione rispettivamente, come: $S_{ik} = A_{ik} + B_{ik}$ e $D_{ik} = A_{ik} - B_{ik}$

c) **Prodotto:** definito anche tra tensori di ordine diverso. L'ordine del tensore prodotto è uguale alla somma degli ordini dei fattori. L'operazione prodotto è illustrata dai tre esempi seguenti:

$$M_{ik} = mT_{ik}; \quad T_{ik} = u_i v_k; \quad T_{ikr} = u_i v_{kr}$$

La prima esprime che il prodotto fra uno scalare (tensore di ordine 0) e un tensore doppio è un tensore doppio, la seconda che il prodotto di due vettori è un tensore doppio, ecc..

d) **Composizione:** prima di parlarne, introduciamo la convenzione di Einstein per la **somma sugli indici ripetuti in alto ed in basso**, ad esempio:

$$a_i^i = a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{i=1}^3 a_i, \quad a_i b^i = a_1 b^1 + a_2 b^2 + \dots + a_n b^n = \sum_{i=1}^n a_n b^n \quad \text{per } (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

convenzione che utilizzeremo negli esempi seguenti.

L'operazione di **composizione** è formalmente analoga all'operazione di prodotto, dalla quale si differenzia in quanto fra i tensori che col loro accoppiamento danno luogo all'operazione, si presuppone la saturazione di almeno un indice, come possiamo vedere dalle seguenti formule (per saturazione intendiamo la somma sugli indici ripetuti):

$$r_i = T_{ik} v^k = T_{i1} v^1 + T_{i2} v^2 + T_{i3} v^3 = \sum_{k=1}^3 T_{ik} v^k \quad \text{con } (k=1, 2, 3)$$

$$H = u_i v^i = u_1 v^1 + u_2 v^2 + u_3 v^3 = \sum_{i=1}^3 u_i v^i \quad \text{con } (k=1, 2, 3)$$

$$q_{ik} = C_{ikrs} E^{rs} = C_{ik11} E^{11} + C_{ik22} E^{22} + C_{ik33} E^{33} + C_{ik12} E^{12} + \dots = \sum_{rs=1}^3 C_{ikrs} R^{rs} \quad \text{con } (r, s=1, 2, 3)$$

$$r_i = C_{ikrs} u^k v^{rs} = C_{i111} u^1 v^{11} + C_{i122} u^1 v^{22} + \dots = \sum_{krs=1}^3 C_{ikrs} u^k v^{rs} \quad \text{con } (k, r, s=1, 2, 3)$$

La prima esprime che componendo un tensore doppio con un vettore si ottiene un vettore, la seconda che componendo due vettori si ottiene uno scalare (si tratta dell'ordinario prodotto scalare), ecc... Osserviamo che nell'operazione di composizione, vengono impegnati sia tensori di eguale rango sia di rango diverso. La semplice regola che determina il rango del tensore che nasce dalla composizione di più tensori è: la somma degli indici non saturati che compaiono nei tensori componenti.

Vediamo ora altre tre caratteristiche dei tensori:

a) **L'invarianza:** Un punto P può riferirsi nello spazio non necessariamente in coordinate cartesiane ortogonali, ma anche in: coordinate polari, cilindriche, cartesiane oblique, ecc. Indicheremo con x_i ($i = 1, 2, 3$) tali generiche coordinate atte ad individuare il punto P e per esprimere che P è funzione assegnata di esse, scriveremo:

$$P = P(x_i) \quad (i = 1, 2, 3)$$

Riferita quindi la posizione del punto P a coordinate generali (x_i), consideriamo una funzione scalare del punto P :

$$F = F(P) = F(x_i)$$

E' chiaro che se si opera un cambiamento di coordinate, la funzione F , che dipende soltanto dal punto P dello spazio, non muta in valore, anche se può ovviamente mutare in forma. La funzione F del posto, che rimane invariata al cambiare del riferimento, è quindi un invariante. Accanto a invarianti scalari potrebbero considerarsi anche invarianti vettoriali. Così per esempio, una forza posizionale $F = F(P)$ applicata nel punto P è tipicamente un invariante vettoriale, perchè non muta al cambiare del riferimento (mentre mutano le sue componenti).

b) La **covarianza:** Ritornando ad una generica funzione scalare del posto $F = F(P)$, osserviamo che mentre la funzione non cambia, al cambiare del riferimento, invece cambiano le sue derivate parziali $\frac{\partial F}{\partial x^i}$. Queste ultime infatti dipendono, oltre che dal punto P , anche dall'orientamento delle linee coordinate. Siamo ora in grado di definire un **tensore covariante**. Qualunque funzione di punto le cui componenti $T_i(x^1, x^2, \dots, x^n)$ nel passaggio da un sistema di coordinate (x^1, x^2, \dots, x^n) verso (y^1, y^2, \dots, y^n) , si trasformano, secondo la:

$T_i(y^1, y^2, \dots, y^n) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} T_\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n)$ (5.5) si definisce un **Tensore covariante** di valenza 1 e l'indice va posto in basso. In questa espressione abbiamo utilizzato una utile convenzione introdotta da Einstein <<La somma sugli indici ripetuti in basso ed in alto>>

c) La **controvarianza**: Se invece le componenti della funzione di punto $T^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$, nello stesso cambiamento di coordinate, si trasformano, secondo la:

$T^i(y^1, y^2, \dots, y^n) = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} T^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n)$ (5.6) si definisce un **Tensore controvariante** di valenza 1 e l'indice va posto in alto.

Se la funzione di punto è unica e non varia:

$$T'(y^1, y^2, \dots, y^n) = T(x^1, x^2, \dots, x^n) \text{ è chiamata } \mathbf{Tensore\ di\ valenza\ 0\ o\ invariante}.$$

Queste definizioni si estendono ai tensori di ordine superiore:

$$T'_{ij} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} T_{\alpha\beta} \quad \text{Tensore di valenza due, due volte covariante}$$

$$T'^{ij} = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta} \quad \text{Tensore di valenza due, due volte controvariante}$$

$$T'^j_i = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} T^\beta_\alpha \quad \text{Tensore misto di ordine due}$$

$$T'^{j k}_i = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial y^j}{\partial x^\beta} \frac{\partial y^k}{\partial x^\gamma} T^{\beta\gamma}_\alpha \quad \text{Tensore misto di valenza tre, una volta covariante e due controvariante}$$

Diamo ora anche ragione del perchè i tensori sono così importanti, per la relatività generale. Se consideriamo le due relazioni (5.5) e (5.6) vediamo che: se un tensore ha componenti nulle in sistema di riferimento, le stesse rimangono nulle (per le proprietà di trasformazione) anche in un qualsivoglia altro sistema di riferimento.

Questo fatto implica che se una legge fisica, può essere enunciata eguagliando a zero le componenti di un tensore, questa, avrà la stessa forma anche negli altri sistemi di riferimento. Esprimiamo il concetto in questo modo:

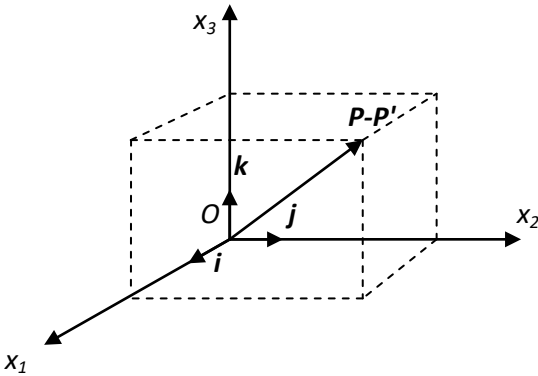
$$\boxed{T_{j_1 j_2 j_3 \dots}^{i_1 i_2 i_3 \dots} = 0} \quad (5.7)$$

La forma che devono assumere le leggi della fisica è quella della (5.7).

(6) - La geometria differenziale delle superfici

Purtroppo la **teoria della relatività generale**, non è un argomento semplice ed anche in questo capitolo, sono costretto a somministrare una buona dose di matematica, sempre nell'intento di fornire gli attrezzi utili per comprenderla.

Uno degli oggetti matematico-geometrici fondamentali per la teoria è quello che viene chiamato "**Tensore metrico fondamentale** ($g_{\mu\nu}$)", vediamo nel seguito di approfondirne la nozione.



Con riferimento ad una terna cartesiana ortogonale nello spazio (\mathbb{R}^3) tridimensionale euclideo, supponiamo vi siano due punti \mathbf{P} e \mathbf{P}' infinitamente vicini: lo spostamento (vettore) $d\mathbf{P} = \mathbf{P} - \mathbf{P}'$ sarà:

$$d\mathbf{P} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_k} dx_k = \mathbf{i} dx_1 + \mathbf{j} dx_2 + \mathbf{k} dx_3$$

essendo $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ i versori dei tre assi cartesiani (x_1, x_2, x_3) . Se consideriamo il prodotto scalare con se stesso del vettore $d\mathbf{P}$ otterremo il quadrato della distanza (ds^2) tra \mathbf{P} e \mathbf{P}' , pertanto:

$$ds^2 = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_k} dx_k \cdot \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x_i} dx_i = \sum_{k=1}^3 dx_k^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad (6.1)$$

siamo pervenuti a questo risultato, perchè il prodotto scalare tra i versori, fornisce:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \quad \text{mentre} \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$$

nella (6.1) si può eliminare il segno di sommatoria scrivendo:

$$ds^2 = \delta_{ik} dx^i dx^k \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (6.2) \quad \text{dove} \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases} \text{ è la } \mathbf{\delta} \text{ di Kroneker e si è usata}$$

la convenzione di Einstein, della somma sugli indici ripetuti in basso ed in alto.

Rimanendo nello spazio euclideo tridimensionale, supponiamo ora, che le originarie coordinate cartesiane (x^1, x^2, x^3) siano funzioni arbitrarie di nuove coordinate (y^1, y^2, y^3) di un nuovo sistema di riferimento cartesiano, avente l'origine in comune col precedente, ma orientate in modo qualunque. Potremo scrivere:

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1(y^1, y^2, y^3) & dx^1 &= \frac{\partial x^1}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial x^1}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial x^1}{\partial y^3} dy^3 \\ x^2 &= x^2(y^1, y^2, y^3) & dx^2 &= \frac{\partial x^2}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial x^2}{\partial y^3} dy^3 \\ x^3 &= x^3(y^1, y^2, y^3) & dx^3 &= \frac{\partial x^3}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial x^3}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial x^3}{\partial y^3} dy^3 \end{aligned}$$

e siccome il quadrato della distanza tra due punti infinitamente vicini, nello spazio tridimensionale, è indipendente dal sistema di coordinate, avremo:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = \left[\frac{\partial x^1}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial x^1}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial x^1}{\partial y^3} dy^3 \right]^2 + \left[\frac{\partial x^2}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial x^2}{\partial y^3} dy^3 \right]^2 + \left[\frac{\partial x^3}{\partial y^1} dy^1 + \frac{\partial x^3}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial x^3}{\partial y^3} dy^3 \right]^2 \quad (6.3)$$

Esaminando la (6.3), nell'ultimo membro a destra, troviamo tre termini per un certo verso simili, costituiti dai quadrati della somma di tre termini e quindi esplicitabile, nella somma dei quadrati dei singoli termini, più la somma dei tre doppi prodotti. Pertanto il primo addendo sarà:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^1} \right)^2 (dy^1)^2 + \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^2} \right)^2 (dy^2)^2 + \left(\frac{\partial x^1}{\partial y^3} \right)^2 (dy^3)^2 + 2 \frac{\partial x^1}{\partial y^1} \frac{\partial x^1}{\partial y^2} dy^1 dy^2 + 2 \frac{\partial x^1}{\partial y^1} \frac{\partial x^1}{\partial y^3} dy^1 dy^3 \\ & + 2 \frac{\partial x^1}{\partial y^2} \frac{\partial x^1}{\partial y^3} dy^2 dy^3 \end{aligned}$$

in modo analogo, per gli altri due termini della (6.3) avremo:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial x^2}{\partial y^1} \right)^2 (dy^1)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial y^2} \right)^2 (dy^2)^2 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial y^3} \right)^2 (dy^3)^2 + 2 \frac{\partial x^2}{\partial y^1} \frac{\partial x^2}{\partial y^2} dy^1 dy^2 + 2 \frac{\partial x^2}{\partial y^1} \frac{\partial x^2}{\partial y^3} dy^1 dy^3 \\ & + 2 \frac{\partial x^2}{\partial y^2} \frac{\partial x^2}{\partial y^3} dy^2 dy^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial x^3}{\partial y^1} \right)^2 (dy^1)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial y^2} \right)^2 (dy^2)^2 + \left(\frac{\partial x^3}{\partial y^3} \right)^2 (dy^3)^2 + 2 \frac{\partial x^3}{\partial y^1} \frac{\partial x^3}{\partial y^2} dy^1 dy^2 + 2 \frac{\partial x^3}{\partial y^1} \frac{\partial x^3}{\partial y^3} dy^1 dy^3 \\ & + 2 \frac{\partial x^3}{\partial y^2} \frac{\partial x^3}{\partial y^3} dy^2 dy^3 \end{aligned}$$

Fatte queste posizioni vediamo di scrivere la (6.3) in modo più sintetico. Impiegando la convenzione di Einstein e ponendo:

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^1}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^1}{\partial y^\nu} + \frac{\partial x^2}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^2}{\partial y^\nu} + \frac{\partial x^3}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^3}{\partial y^\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3) \quad (6.4)$$

la (6.3) diviene:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3)$$

I $(g_{\mu\nu})$ forniti dalla (6.4) sono le nove quantità (esprese in forma matriciale,) seguenti:

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \quad \text{di esse solo sei sono indipendenti, poichè } g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

Quello che abbiamo appena definito, il $(g_{\mu\nu})$ viene chiamato: " **tensore metrico fondamentale** ". Si tratta di un tensore del secondo ordine covariante e la forma dello stesso definisce la qualità: **piatto** o **curvo** dello spazio nel quale rappresenta la regola per definirne la distanza tra i punti.

Le considerazioni che abbiamo svolto finora, nello spazio euclideo tridimensionale, si possono estendere ad uno spazio con un numero generico (n) di dimensioni. Interessante per i nostri fini, risulterà lo spazio **pseudoeuclideo** di Minkowski, cioè lo **spaziotempo** , sul quale risulta definito l'intervallo spaziotemporale:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu \quad (\mu, \nu = 0,1,2,3) \quad \text{con le } (g_{\mu\nu}) \quad \text{così definite:}$$

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^0}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^0}{\partial y^\nu} - \frac{\partial x^1}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^1}{\partial y^\nu} - \frac{\partial x^2}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^2}{\partial y^\nu} - \frac{\partial x^3}{\partial y^\mu} \frac{\partial x^3}{\partial y^\nu} \quad (\mu, \nu = 0,1,2,3) \quad (6.5)$$

con le corrispondenze: ($x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$). Notiamo dal confronto tra la (6.4) e la (6.5) la differenza nella segnatura delle componenti spaziali (-) per la (6.5) e (+) per la (6.4). Cosa rende questo spazio, che indicheremo con (E^4) in onore di Albert Einstein "**pseudoeuclideo**"?:

- La diversa segnatura delle componenti spaziali.
- La coordinata ($x_0=ct$) la quale ha le dimensioni di una lunghezza.

Con le posizioni appena fatte, se si hanno per le $(g_{\mu\nu})$ i seguenti valori:

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\mu, \nu = 0,1,2,3) \quad (6.6) \quad \text{abbiamo l'usuale **SRI** della relatività speciale}$$

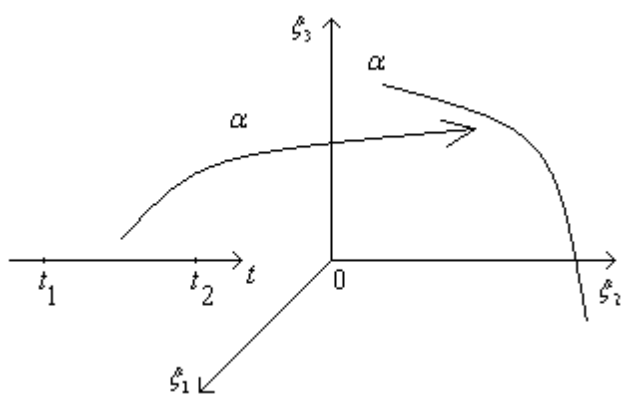
e con questa caratterizzazione, diciamo che lo spaziotempo è **piatto**.

La genialità di Einstein è stata quella di aver dettato il legame tra le $(g_{\mu\nu})$ e la presenza di un campo di accelerazione o gravitazionale. Possiamo a questo punto affermare, che quando la configurazione delle $(g_{\mu\nu})$ differisce dalla configurazione (6.6) siamo in presenza di effetti gravitazionali ed i coefficienti $(g_{\mu\nu})$ vengono definiti: **potenziali gravitazionali**.

Per completare la dotazione strumentale, affrontiamo il tema degli spazi curvi e del calcolo differenziale assoluto.

Per fare questo, vado a rovistare nel documento ("**GDS: Geometria Differenziale delle Superfici**" di Arrigo Amadori) per trarne un'utile sintesi per il nostro scopo. Questo documento è secondo me la miglior guida che ho trovato, per la comprensione degli **spazi curvi** e della loro geometria e siccome io ne farò solo una sintesi, consiglio chi è interessato, a fare una ricerca in rete ed a procurarsi il documento originale.

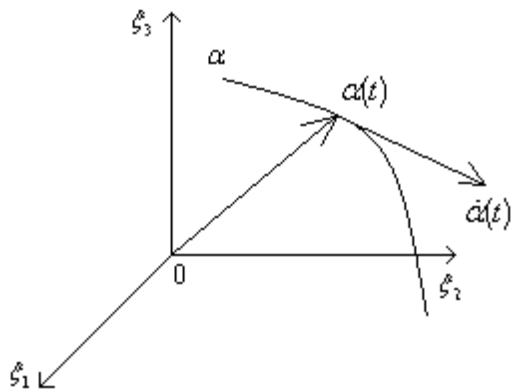
Iniziamo:



(Fig. 6.1)

Nel sistema di riferimento (O, ξ_1, ξ_2, ξ_3) la curva (α) , risulta parametrizzata dal parametro $(t_1 < t < t_2)$ in questo modo (Fig. 6.1):

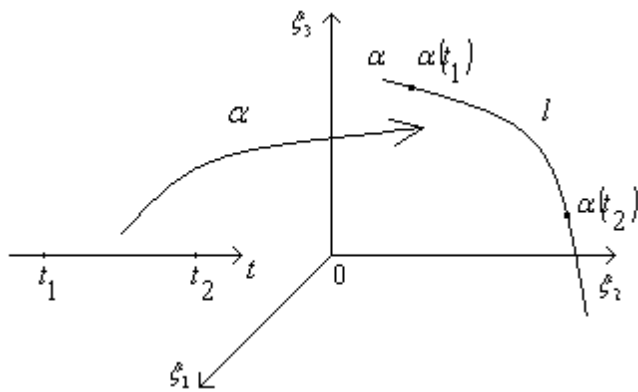
$\alpha(t)$ oppure $\begin{pmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \xi_3(t) \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} \xi_1 = \xi_1(t) \\ \xi_2 = \xi_2(t) \\ \xi_3 = \xi_3(t) \end{pmatrix}$ (6.7) naturalmente la parametrizzazione non è unica.



(Fig. 6.2)

Definiamo il vettore tangente (Fig. 6.2):

Le sue componenti, sono: $\dot{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\xi}_1(t) \\ \dot{\xi}_2(t) \\ \dot{\xi}_3(t) \end{pmatrix}$ (6.8) (il puntino sopra le ξ indica la derivata rispetto a t)



(Fig. 6.3)

La lunghezza della curva $\alpha(t)$ tra i punti $\alpha(t_1)$ e $\alpha(t_2)$ è:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2 + \dot{\xi}_3^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\alpha}(t)\| dt \quad (6.9)$$

se si sceglie una parametrizzazione per cui valga in ogni punto $\|\dot{\alpha}(t)\| = 1$, la lunghezza assume una forma particolarmente semplice, cioè:

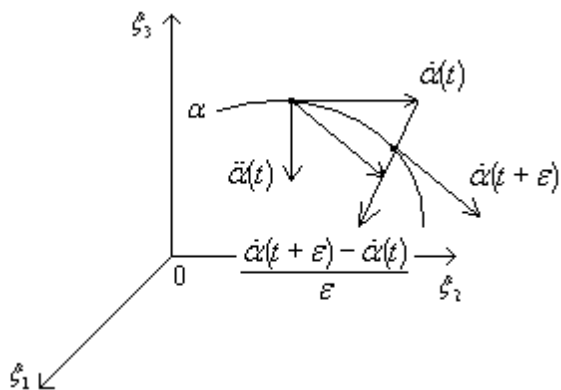
$$l = \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\alpha}(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1 \quad (6.10)$$

In questo caso, la curva è parametrizzata dalla lunghezza, la quale risulta lunga come l'intervallo di variabilità del parametro (t). intuitivamente, in questo caso si può pensare che la curva sia ottenuta da un segmento, semplicemente incurvandolo, senza allungarlo o accorciarlo.

Una curva parametrizzata dalla lunghezza introduce in modo naturale il concetto di curvatura (di una curva).

Consideriamo la curva $\alpha(t)$ parametrizzata dalla lunghezza, cioè per cui in ogni punto sia $\|\dot{\alpha}(t)\| = 1$ la curvatura in un punto della curva indica, quanto il vettore tangente cambia in direzione.

Se eseguiamo la derivata prima del vettore tangente, cioè la derivata seconda della curva, otteniamo un vettore $\ddot{\alpha}(t) \perp \dot{\alpha}(t)$ la cui norma indica la curvatura della curva.



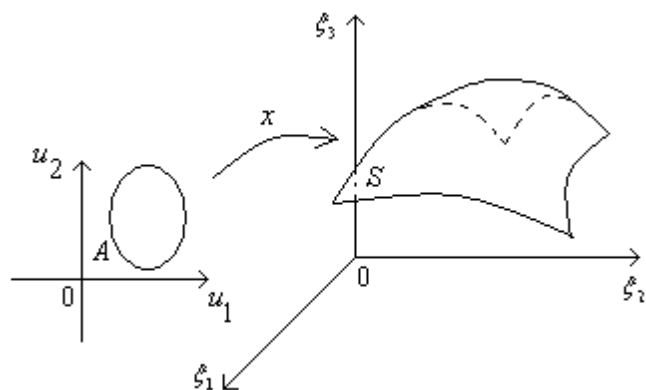
(Fig. 6.4)

La perpendicolarità $\ddot{\alpha}(t) \perp \dot{\alpha}(t)$ la si intuisce dalla (Fig. 6.4), facendo il limite per $\epsilon \rightarrow 0$.

Definiamo la curvatura $R(t)$ di una curva parametrizzata dalla lunghezza con il valore non negativo:

$$\boxed{R = \|\ddot{\alpha}(t)\|} \quad (6.11)$$

Passiamo ora all'esame delle superfici:



(Fig. 6.5)

Anche qui compare il concetto di parametrizzazione, questa volta però con due parametri u_1 e u_2 , vedi (Fig. 6.5).

Le parametrizzazioni della superficie (S) sono infinite, noi ne scegliamo una (x) e la indicheremo così:

$$\boxed{x(u_1, u_2)} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} \xi_1(u_1, u_2) \\ \xi_2(u_1, u_2) \\ \xi_3(u_1, u_2) \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix} \xi_1 = \xi_1(u_1, u_2) \\ \xi_2 = \xi_2(u_1, u_2) \\ \xi_3 = \xi_3(u_1, u_2) \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

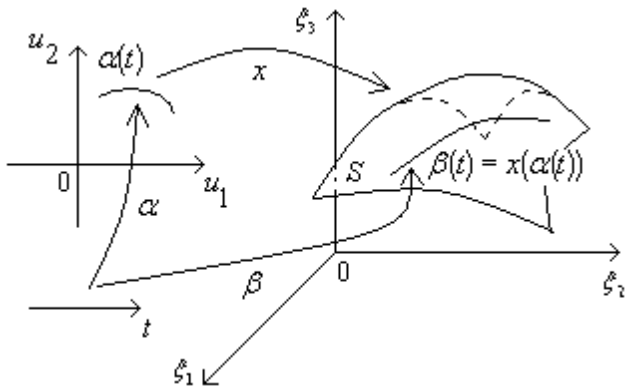
Una parametrizzazione, determina sulla superficie un sistema di coordinate locali, in quanto ogni punto di essa viene ad essere associato ad una coppia ordinata (u_1, u_2) in questo modo:

$$(u_1, u_2) \rightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (6.13)$$

Con riferimento alla (Fig. 6.6), consideriamo, la superficie (S) dotata della parametrizzazione (x) i cui punti sono in corrispondenza biunivoca con i punti di (O, u_1, u_2) e scegliamo una curva $\alpha(t)$ i cui punti sono $(u_1(t), u_2(t))$.

Tramite la parametrizzazione (x) otteniamo una corrispondente curva: $\beta(t) = x(\alpha(t))$ che giace completamente sulla superficie (S) . Le componenti di $\beta(t) = x(\alpha(t))$ sono:

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} \xi_1(u_1(t), u_2(t)) \\ \xi_2(u_1(t), u_2(t)) \\ \xi_3(u_1(t), u_2(t)) \end{pmatrix} \quad (6.14)$$

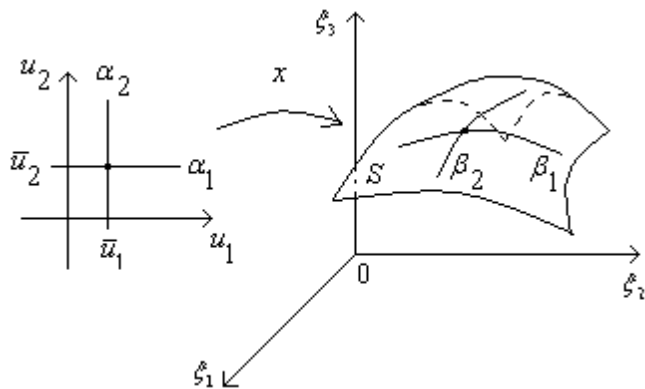


(Fig. 6.6)

Fra le curve su (S) rivestono particolare importanza le linee (o curve) coordinate (vedi Fig. 6.7).

Consideriamo le rette di $(0, u_1, u_2)$:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} t \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix} \quad e \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ t \end{pmatrix} \quad (6.15) \quad \text{dove} \quad \bar{u}_1 = \text{costante} \quad e \quad \bar{u}_2 = \text{costante}$$



(Fig. 6.7)

Le curve β_1, β_2 sono quindi le linee coordinate su (S) corrispondenti alle linee rette α_1, α_2 .

Calcoliamo il vettore tangente $\dot{\beta}(t)$ (vedi la (6.14)):

$$\dot{\beta}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial u_1} \dot{u}_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial u_2} \dot{u}_2 \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial u_1} \dot{u}_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial u_2} \dot{u}_2 \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial u_1} \dot{u}_1 + \frac{\partial \xi_3}{\partial u_2} \dot{u}_2 \end{pmatrix} \quad (6.16) \quad \text{che può anche essere scritta come:}$$

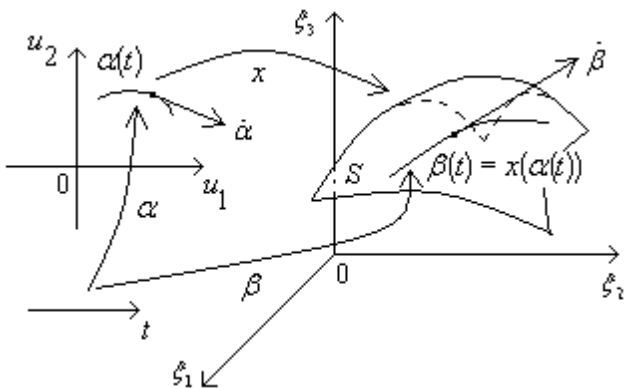
$$\dot{\beta}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial u_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial u_2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} \quad (6.17) \quad \text{dove l'operatore:}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \xi_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial u_1} & \frac{\partial \xi_3}{\partial u_2} \end{pmatrix} = dx \quad (6.18) \quad \text{è il differenziale della parametrizzazione } (x)$$

la (6.17) sostituendovi la (6.18), diventa:

$$\dot{\beta}(t) = dx \cdot \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

Il significato importantissimo di questa equazione è che il differenziale (dx) della parametrizzazione (x) (vedi Fig.6.8), trasforma il vettore tangente $\dot{\alpha} = (\dot{u}_1, \dot{u}_2)$ alla curva (α) di $(0, u_1, u_2)$ nel corrispondente vettore $\dot{\beta} = (\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3)$ tangente alla curva (β) su (S) .



(Fig. 6.8)

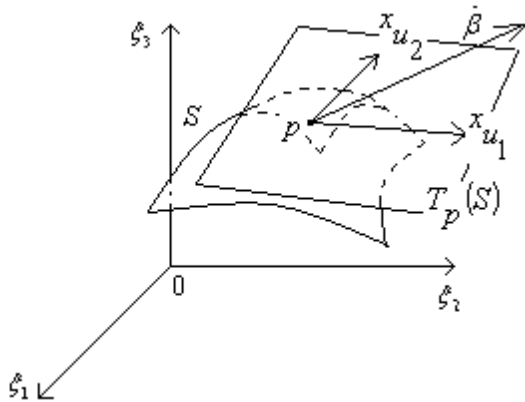
La (6.16) può anche essere scritta come:

$$\dot{\beta}(t) = \dot{u}_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial u_1} \end{pmatrix} + \dot{u}_2 \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial u_2} \end{pmatrix} \quad (6.20) \quad \text{ed introducendo i vettori:}$$

$$x_{u_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial u_1} \end{pmatrix} \quad e \quad x_{u_2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial u_2} \end{pmatrix} \quad (6.21) \quad \text{più semplicemente, assume la forma:}$$

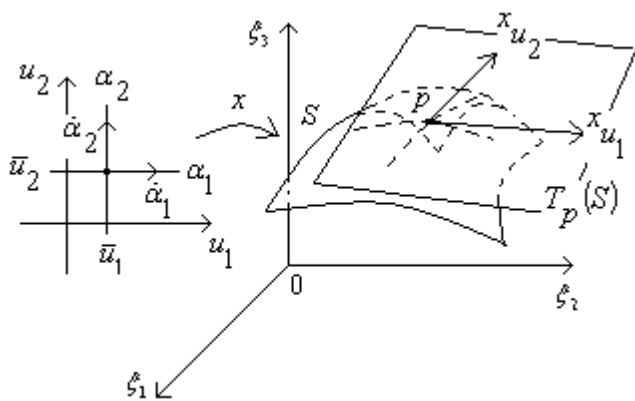
$$\dot{\beta}(t) = \dot{u}_1 x_{u_1} + \dot{u}_2 x_{u_2} \quad (6.22)$$

I vettori x_{u_1} e x_{u_2} dipendono solo dalla parametrizzazione (x) e, in un punto (p) della superficie (S) , tutti vettori tangenti in (p) a tutte le curve giacenti sulla superficie ivi passanti, sono del tipo: $a_1 x_{u_1} + a_2 x_{u_2}$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ (le derivate che definiscono x_{u_1} e x_{u_2} vanno naturalmente calcolate nel punto (p)).



(Fig. 6.9)

I vettori $a_1 x_{u_1} + a_2 x_{u_2}$ con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, costituiscono (vedi (Fig. 6.9) il piano tangente ad (S) nel punto (p) , e lo chiameremo $T_p(S)$.



(Fig. 6.10)

Vediamo l'importante significato geometrico dei vettori x_{u_1} e x_{u_2} , considerando le rette di $(0, u_1, u_2)$:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} t \\ \bar{u}_2 \end{pmatrix} \quad e \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ t \end{pmatrix} \quad (6.23) \quad \text{I loro vettori tangenti sono: } \dot{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \dot{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.24)$$

I corrispondenti vettori tangenti su (S) sono:

$$\boxed{dx \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_{u_1}} \quad e \quad \boxed{dx \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_{u_2}} \quad (6.25)$$

cioè i vettori x_{u_1} e x_{u_2} sono i vettori tangenti alle linee coordinate passanti per (p) della superficie (S) .

I vettori tangenti ad una superficie la linearizzano. Per questo motivo il piano tangente riveste un ruolo fondamentale nella creazione della metrica della superficie. In particolare i vettori tangenti x_{u_1} e x_{u_2} costituiscono gli oggetti di base di tale metrica, infatti si definiscono gli elementi della stessa, in questo modo:

$$\begin{aligned}
g_{11} &= \langle x_{u_1}, x_{u_1} \rangle = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial u_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial u_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial u_1} \right)^2 \\
g_{12} &= g_{21} = \langle x_{u_1}, x_{u_2} \rangle = \langle x_{u_2}, x_{u_1} \rangle = \frac{\partial \xi_1}{\partial u_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial u_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial u_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial u_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial u_1} \frac{\partial \xi_3}{\partial u_2} \\
g_{22} &= \langle x_{u_2}, x_{u_2} \rangle = \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial u_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial u_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial u_2} \right)^2
\end{aligned} \tag{6.26}$$

Le grandezze $g_{i,j} = \langle x_{u_i}, x_{u_j} \rangle$ con $(i, j = 1, 2)$ raccolte in forma matriciale: $[g_{i,j}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$ (6.27)

costituiscono il tensore metrico (valido nel punto (p) della superficie (S)).

Introduciamo ora i "**simboli di Christoffel**" chiamati anche coefficienti di connessione, che si ricavano dagli elementi del tensore metrico e sue derivate:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 \left[\left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial u_j} + \frac{\partial g_{li}}{\partial u_k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_l} \right) g^{il} \right] \tag{6.28}$$

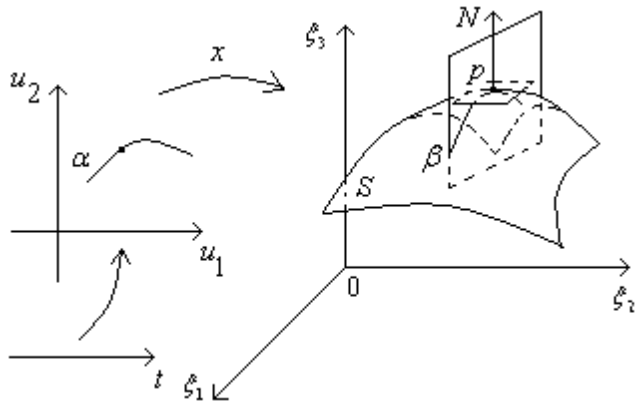
dove (g^{il}) è un elemento della matrice:

$$[g^{ij}] = \frac{1}{\det(g_{ij})} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{bmatrix} \tag{6.29} \text{ cioè la matrice inversa di } [g_{ij}]$$

Parliamo ora della **curvatura** di una superficie, nella fattispecie "La curvatura Gaussiana".

L'idea alla base della definizione di curvatura gaussiana della superficie (S) in (p) è quella di sezionare una superficie con piani passanti per il versore \mathbf{N} (normale alla superficie (S) in (p)):

$$\mathbf{N} = \frac{x_{u_1} \times x_{u_2}}{\|x_{u_1} \times x_{u_2}\|} \text{ definito nel punto } (p) \text{ (Fig. 6.11).}$$



(Fig. 6.11)

In questo modo si ottengono infinite sezioni alle quali corrispondono curve di varia curvatura in (p) . Si definisce curvatura $R(p)$ della superficie in (p) il prodotto delle curvatura minime e massime così ottenute.

Introduciamo a questo punto "Il Tensore di curvatura di Riemann" definito dai simboli di Christoffel e dalle loro derivate:

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial u_k} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u_l} + \sum_{m=1}^2 \Gamma_{mk}^i \Gamma_{jl}^m - \sum_{m=1}^2 \Gamma_{ml}^i \Gamma_{jk}^m \tag{6.30}$$

Dal tensore di misto di Riemann, si può ricavare il "tensore di Ricci":

$$\boxed{R_{il} = R_{ikl}^k = \sum_{k=1}^2 R_{ikl}^k = R_{i1l}^1 + R_{i2l}^2 \text{ con } (i, l = 1, 2)} \quad (6.31)$$

ottenuta (componendo/saturando) sull'indice (k) il tensore misto di Riemann, che in forma matriciale sarà:

$$[R_{il}] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

Fatte queste posizioni, la **curvatura scalare** della superficie (S) nel punto (p), risulta essere:

$$\boxed{R = g^{il} R_{il}} \quad (6.33) \text{ cioè la contrazione del tensore di Ricci con la matrice inversa del tensore metrico.}$$

Le (6.28),(6.29),(6.30),(6.31),(6.32) e (6.33) rappresentano le principali relazioni per comprendere a fondo il contenuto delle equazioni di campo di Einstein.

Un altro strumento utile per esaminare le conseguenze, delle equazioni di campo è l'equazione per le geodetiche, le quali in linea di principio, sono le linee di minima lunghezza che possono essere tracciate fra due punti.

E' chiaro che nell' usuale spazio tridimensionale le geodetiche, sono le linee rette, ma su di una superficie (S) le geodetiche saranno le linee di minor lunghezza e su di una superficie curva, sono l'analogo delle rette.

Le geodetiche, assieme al piano tangente, costituiscono gli elementi basilari della teoria delle superfici.

Data la notevole difficoltà matematica necessaria per definire la geodetica su di una superficie, in questa sede ci accontenteremo di riportarne le equazioni, in funzione degli enti che abbiamo già definito in precedenza:

$$\boxed{\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0} \quad (6.34)$$

Notiamo che si tratta di un sistema consistente di (i) equazioni differenziali del secondo ordine, dove la dipendenza dalla metrica è rappresentata dai simboli di Christoffel che ne dipendono.

(7) - Le equazioni di campo di Einstein

Albert Einstein nel 1915 pubblicò le seguenti equazioni di campo originali:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (7.1)$$

Successivamente le modificò, aggiungendo la "costante cosmologica", in modo da ottenere un modello di universo statico. Nella forma con la costante cosmologica, le equazioni di campo sono:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (7.2)$$

dove:

- $R_{\mu\nu}$ è il tensore di curvatura di Ricci
- R la curvatura scalare
- $g_{\mu\nu}$ il tensore metrico
- Λ la costante cosmologica
- $T_{\mu\nu}$ il tensore energia-impulso
- c la velocità della luce nel vuoto
- G la costante di gravitazione universale

Il tensore $g_{\mu\nu}$ descrive la metrica dello spaziotempo ed è un tensore simmetrico 4x4, che ha quindi 10 componenti indipendenti, ma date le identità di Bianchi, le equazioni indipendenti si riducono a 6. Definendo il tensore di Einstein ($G_{\mu\nu}$) come segue:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (7.3)$$

possiamo riscrivere le equazioni di campo, come:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (7.4)$$

La differenza tra i termini che abbiamo già definito nel precedente capitolo e quelli che troviamo nelle equazioni di campo, sta tutta nell'ambiente nel quale li calcoliamo. Nel capitolo precedente l'ambiente era l'ordinario spazio tridimensionale e ci riferivamo ad una geometria per quanto possibile euclidea, mentre l'ambiente per le equazioni di campo è lo spaziotempo (E^4), il quale gode delle stesse caratteristiche dello spaziotempo (M^4) di Minkowski, definite nel Cap.3, ma con maggiore libertà nella metrica, che ora può essere modificata dai campi gravitazionali.

Naturalmente in approssimazione di campo gravitazionale debole od assente, lo spaziotempo (E^4) diventa indistinguibile da (M^4). Con queste premesse, vediamo che il tensore misto di Riemann, diventa:

$$R^i_{\mu k \nu} = \frac{\partial \Gamma^i_{\mu\nu}}{\partial x_k} - \frac{\partial \Gamma^i_{\mu k}}{\partial x_\nu} + \sum_{m=0}^3 \Gamma^i_{mk} \Gamma^m_{\mu\nu} - \sum_{m=0}^3 \Gamma^i_{m\nu} \Gamma^m_{\mu k} \quad (7.5)$$

mentre i simboli di Christoffel:

$$\Gamma_{\mu\nu}^i = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^3 \left[\left(\frac{\partial g_{\nu l}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_l} \right) g^{il} \right] \quad (7.6)$$

e (g^{il}) è un elemento della matrice:

$$[g^{ij}] = \frac{1}{\det(g_{ij})} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \quad (7.8) \text{ cioè la matrice inversa di } [g_{ij}]$$

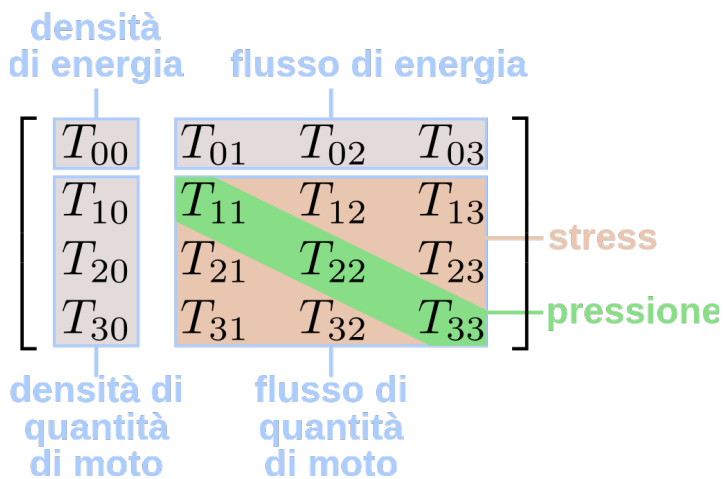
Gli elementi C_{lm} ($l, m=1,2,3,4$) sono i complementi algebrici degli elementi della matrice $[g_{ij}]$, cioè ad esempio:

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} g_{00} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{12} & g_{13} \\ g_{30} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \text{ ottenuto dalla matrice } [g_{ij}] \text{ eliminandovi la terza riga e la seconda colonna.}$$

La contrazione del tensore misto di Riemann, per ricavare il tensore di curvatura di Ricci, si esegue nel seguente modo:

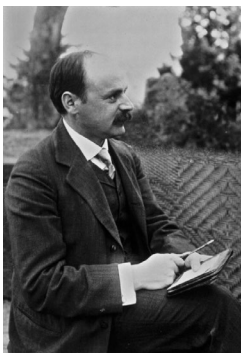
$$R_{\mu\nu} = R_{\mu k \nu}^k \quad (7.9) \text{ e la curvatura scalare } R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (7.10)$$

Ora spendiamo due parole per il tensore energia-impulso $(T_{\mu\nu})$, esso descrive il flusso di energia e quantità di moto associato ad un campo. Dalla meccanica dei fluidi, abbiamo preso la seguente descrizione:



La descrizione in dettaglio di questo tensore, esula dallo scopo della presente trattazione e come vedremo, nel trattare la soluzione di Schwarzschild, le sue componenti verranno poste uguali a zero.

(8) - La soluzione di Schwarzschild



Karl Schwarzschild (1873-1916) matematico, astronomo e astrofisico tedesco.

Nel settembre 1914, iniziata da un mese la prima guerra mondiale, si arruolò volontario e fu spedito nelle retrovie del fronte occidentale, nel Belgio occupato, dove diresse una stazione meteorologica. Successivamente, nel 1915, fu trasferito sul fronte orientale russo, come tenente di artiglieria con l'incarico di eseguire calcoli balistici e dove scoprì le prime soluzioni esatte, delle equazioni di campo. Lì contrasse il pemfigo, una malattia autoimmune della pelle. Gravemente malato e diventato invalido, tornò dal fronte russo nel marzo del 1916. Morì a Potsdam alcuni mesi dopo.

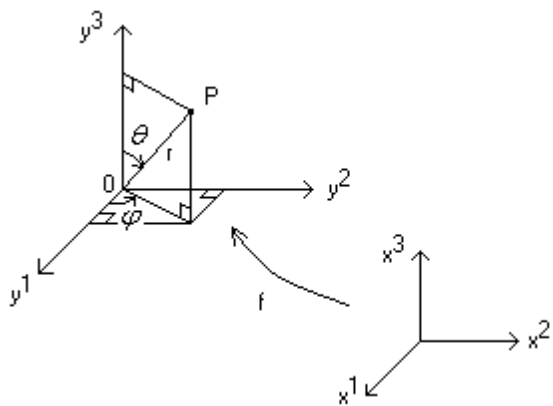
Fu il primo ad individuare una soluzione analitica per le equazioni di campo. Le risolse per un sistema costituito da una concentrazione di massa, a simmetria centrale sferica, non rotante e priva di carica elettrica. Situazione che approssima il nostro sistema solare.

Vediamo una derivazione della metrica di Schwarzschild, che ho preso da (MRQ: meccanica, relatività, quanti. Di Arrigo Amadori):

Il campo gravitazionale più semplice, così come nella teoria classica di Newton, è quello generato da una massa puntiforme. Un campo analogo può essere creato da una distribuzione di masse a simmetria centrale.

Ci proponiamo in questo paragrafo di determinare tale metrica che costituisce un caso di fondamentale importanza per la RG.

Consideriamo il sistema di coordinate sferiche (x_1, x_2, x_3) di (\mathbb{R}^3) definite (Rif. Fig. 8.1) da:



(Fig. 8.1)

$$f: \begin{cases} y^1 = x^1 \sin(x^2) \cos(x^3) \\ y^2 = x^1 \sin(x^2) \sin(x^3) \\ y^3 = x^1 \cos(x^2) \end{cases} \quad (8.1) \quad \text{dove:} \quad x^1 = r, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = \varphi \quad (8.2)$$

Poichè:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0)$$

l' elemento dl^2 di \mathbb{R}^3 in coordinate sferiche è:

$$dl^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r} dr\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} d\varphi\right)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (8.3)$$

ed il tensore metrico sarà:

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

Consideriamo ora una massa puntiforme (M) posizionata nell'origine (O). Essa, come afferma la Relatività generale, perturba la metrica dello Spaziotempo, rendendolo non euclideo. Il tensore metrico del campo statico a simmetria centrale, prodotto dalla massa (M) dovrà allora avere la forma:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} a(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 c(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 d(r) \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

dove $a(r), b(r), c(r)$ sono funzioni da determinare.

La scelta delle componenti in (8.5) è dettata dal fatto che in un campo statico non deve essere presente esplicitamente la variabile temporale (x^0) e deve essere $g_{0\alpha} = 0$. Inoltre, all'infinito, dove la metrica ritorna ad essere euclidea, $g_{\alpha\beta}$ deve eguagliare $-\gamma_{\alpha\beta}$ della (8.4). Inoltre, la simmetria centrale impone che le funzioni (a, b, c, d) dipendano solo da (r). L'elemento (ds^2) è quindi:

$$ds^2 = a(r)c^2 dt^2 - b(r)dr^2 - r^2 c(r)d\theta^2 - r^2 d(r)\sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (8.6)$$

dove si è posto $x^0 = ct$. Il tensore metrico (8.5) mantiene la proprietà di simmetria centrale richiesta, ma la coordinata (r) non è più il raggio vettore in senso euclideo. Per dare un "senso euclideo" ad (r) imponiamo che ogni circonferenza di centro (O) abbia lunghezza ($2\pi r$).

Per fare questo, poniamo $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = \text{costante}$ e $t = \text{costante}$. L'elemento di lunghezza sarà allora:

$dl = r\sqrt{d(r)}d\varphi$ per cui, integrando su φ nell'intervallo $(0, 2\pi)$: $l = \int_0^{2\pi} r\sqrt{d(r)}d\varphi = r\sqrt{d(r)}2\pi$ e quindi, dovendo avere:

$$r\sqrt{d(r)}2\pi = 2\pi r$$

avremo: $d(r) = 1$ (8.7)

ponendo poi $\varphi = \text{costante}$ ed integrando su θ nell'intervallo $(0, 2\pi)$, otteniamo anche:

$$c(r) = 1 \quad (8.8)$$

Il tensore metrico con i risultati delle (8.7) e (8.8) risulta:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} a(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

Un calcolo diretto fornisce per i simboli di Christoffel non nulli i seguenti valori:

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2a} \frac{da}{dr}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2b} \frac{db}{dr}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2b} \frac{db}{dr}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{r}{b}, \quad \Gamma_{33}^1 = -\frac{r}{b} \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

Le componenti non nulle del tensore di Ricci risultano di conseguenza (calcolando direttamente) (vedi appendice 3):

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= \frac{1}{2b} \frac{d^2 a}{dr^2} - \frac{1}{4b} \frac{da}{dr} \frac{d}{dr} \ln(ab) + \frac{1}{rb} \frac{da}{dr} \\
 R_{11} &= -\frac{1}{2a} \frac{d^2 a}{dr^2} + \frac{1}{4a^2} \left(\frac{da}{dr} \right)^2 + \frac{1}{4ab} \frac{da}{dr} \frac{db}{dr} + \frac{1}{rb} \frac{db}{dr} \\
 R_{22} &= 1 - \frac{1}{b} + \frac{r}{2b} \frac{d}{dr} \left[\ln \left(\frac{b}{a} \right) \right] \\
 R_{33} &= \sin^2 \theta \left(1 - \frac{1}{b} + \frac{r}{2b} \frac{d}{dr} \left[\ln \left(\frac{b}{a} \right) \right] \right)
 \end{aligned}$$

Tra le varie forme nelle quali possono essere scritte le equazioni di campo, abbiamo anche la:

$$R_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T \right)$$

la quale nel vuoto, fuori dalla massa che crea il campo (quindi per $T_{ij} = 0 \rightarrow T = 0$) ci restituisce: $R_{ij} = 0$ (8.10), avremo quindi:

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\frac{1}{2b} \frac{d^2 a}{dr^2} - \frac{1}{4b} \frac{da}{dr} \frac{d}{dr} \ln(ab) + \frac{1}{rb} \frac{da}{dr} = 0 \\
 &-\frac{1}{2a} \frac{d^2 a}{dr^2} + \frac{1}{4a^2} \left(\frac{da}{dr} \right)^2 + \frac{1}{4ab} \frac{da}{dr} \frac{db}{dr} + \frac{1}{rb} \frac{db}{dr} = 0 \quad (8.11) \\
 &1 - \frac{1}{b} + \frac{r}{2b} \frac{d}{dr} \left[\ln \left(\frac{b}{a} \right) \right] = 0 \\
 &\sin^2 \theta \left(1 - \frac{1}{b} + \frac{r}{2b} \frac{d}{dr} \left[\ln \left(\frac{b}{a} \right) \right] \right) = 0
 \end{aligned} \right.$$

Cerchiamo ora la funzione a nella forma: $a = 1 + \frac{\alpha}{r}$ (8.12)

Questa scelta è coerente col fatto che per $r \rightarrow \infty$ la (8.9) deve diventare galileiana, cioè $a = 1$.

Sostituendo la (8.12) nella prima equazione delle (8.11) si ottiene:

$$b = \frac{\beta}{1 + \frac{\alpha}{r}} \quad (8.13) \quad \text{dove } \beta \text{ è un'altra costante da determinare.}$$

Sostituendo a e b nella terza equazione delle (8.11) si ricava: $\beta = 1$ Le funzioni a e b risultano quindi:

$$\left\{ \begin{aligned}
 &a = 1 + \frac{\alpha}{r} \\
 &b = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{r}}
 \end{aligned} \right. \quad (8.14) \quad \text{si dimostra che esse soddisfano la seconda delle (7.11).}$$

Questo significa che le (8.14) sono effettivamente le soluzioni del sistema costituito dalle (8.11) (la cui quarta equazione è equivalente alla terza).

Rimane da definire la costante (α) e per fare questo utilizzeremo il limite classico (per r grandi). Secondo tale limite, si deve avere:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \quad (8.15) \quad \text{dove } \varphi \text{ è il potenziale gravitazionale classico (newtoniano).}$$

Il potenziale newtoniano generato dalla massa puntiforme (M) è:

$$\varphi = -G \frac{M}{r} \quad (8.16)$$

Dovendo poi essere:

$$1 + \frac{\alpha}{r} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \quad (8.17) \quad \text{si ricava: } \alpha = -\frac{2GM}{c^2} \quad (8.18)$$

Il valore:

$$\boxed{r_g = \frac{2GM}{c^2}} \quad (8.19) \quad \text{è detto "raggio gravitazionale" e le funzioni } a \text{ e } b \text{ di conseguenza}$$

diventano:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 1 - \frac{r_g}{r} \\ b = \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \end{array} \right. \quad (8.20) \quad \text{con queste posizioni la metrica } (ds^2) \text{ di Schwarzschild diventa:}$$

$$\boxed{ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2} \quad (8.21)$$

e questo è il relativo tensore metrico:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{r_g}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (8.22)$$

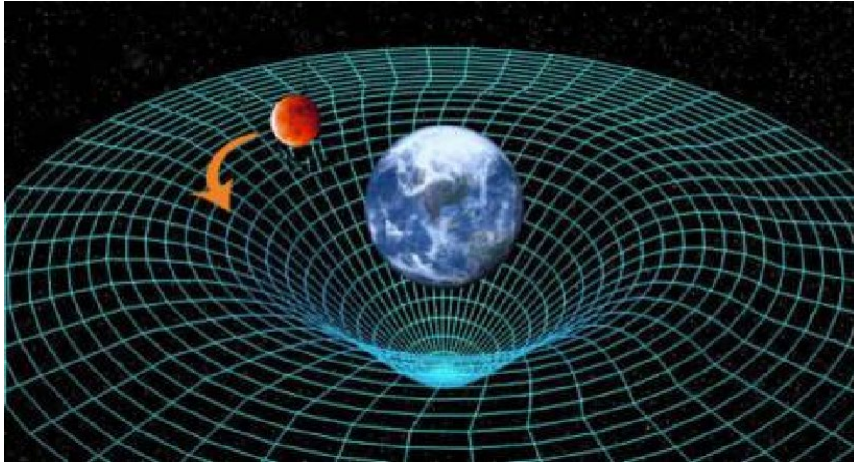
Osservando questo risultato, si vede subito che affinché la metrica abbia senso fisico, deve essere:

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r} > 0 \quad (8.21) \quad \text{con questa condizione si ha } \det(g_{ij}) < 0 \quad \text{come è giusto che sia.}$$

Questa condizione sulla metrica fu compresa appieno solo alcuni anni dopo (collasso gravitazionale, buchi neri).

Ora che abbiamo calcolato il tensore metrico per la metrica di Schwarzschild, al prossimo punto affrontiamo il tema delle "geodetiche", cioè delle traiettorie seguite dai corpi (e non solo) in caduta libera nello spaziotempo.

(9) - Le geodetiche nello spaziotempo e la precessione del perielio di Mercurio



(Fig. 9.1)

Proviamo a descrivere il moto di una particella in uno spaziotempo perturbato da una massa (M) a simmetria centrale e quindi descritto dalla metrica Schwarzschild. Questa situazione modella in modo egregio il moto di un pianeta del nostro sistema solare, dove la massa (m) del pianeta realizza la condizione: ($m \ll M$).

In questa sezione, mi appoggerò ancora al (MRQ: meccanica, relatività, quanti. Di Arrigo Amadori) e nella conclusione al (Relatività ed astrodinamica di Vittorio Banfi).

Per descrivere il moto del nostro pianeta attorno al sole, ripartiamo dalla metrica di Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (9.1) \quad \text{con} \quad r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (9.2)$$

Da tale metrica discendono i seguenti simboli (non nulli) di Christoffel (vedi appendice 2):

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{r_g}{2r(r-r_g)}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{r_g(r-r_g)}{2r^3}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{-r_g}{2r(r-r_g)}, \quad \Gamma_{22}^1 = -(r-r_g), \quad \Gamma_{33}^1 = -(r-r_g)\sin^2\theta$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin\theta \cos\theta, \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Come ha detto John Wheeler "lo spazio agisce sulla materia dicendole come muoversi" [la particella si muove seguendo la geodetica]. A sua volta "la materia [la massa centrale(M)] agisce sullo spazio, dicendogli come curvarsi".

Per definizione una particella si muoverà in un campo gravitazionale, seguendo una geodetica dello spaziotempo (spazio pseudo-riemanniano, incurvato dalla presenza della materia, nel nostro caso la massa centrale (M) sorgente del campo gravitazionale) cioè, seguendo la:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 \quad (9.3) \quad \text{dove le } x^i \text{ sono: } x^0 = ct, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$$

Causa la simmetria centrale del campo, il moto della particella avviene su un piano e non perdiamo di generalità, se assumiamo che il moto avvenga sul piano definito da: $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Fatta questa posizione, le (9.3) assumono il seguente aspetto:

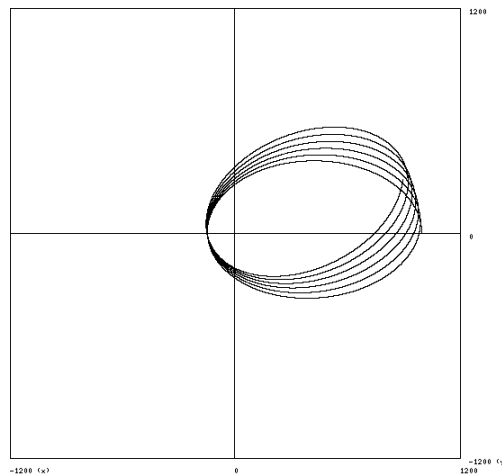
$$\begin{cases} \frac{d^2 t}{ds^2} + \frac{r_g}{r(r-r_g)} \frac{dt}{ds} \frac{dr}{ds} = 0 \\ \frac{d^2 r}{ds^2} + \frac{c^2 r_g (r-r_g)}{2r^3} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 - \frac{r_g}{2r(r-r_g)} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 - (r-r_g) \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = 0 \\ \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\varphi}{ds} = 0 \end{cases} \quad (9.4)$$

con le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} t_0 = t(0); \quad \frac{dt_0}{ds} = \frac{dt}{ds}(0) \\ r_0 = r(0); \quad \frac{dr_0}{ds} = \frac{dr}{ds}(0) \\ \varphi_0 = \varphi(0); \quad \frac{d\varphi_0}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}(0) \end{cases} \quad (9.5)$$

La caratteristica saliente delle soluzioni periodiche con $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ delle (9.4) è che a differenza da come succede con la prima legge di Keplero, (nella quale le traiettorie, sono ellissi chiuse e sovrapposte) otteniamo invece traiettorie aperte, per le quali i punti con $\left(\frac{dr}{ds} = 0\right)$ si hanno per angoli che differiscono di $(\Delta\varphi > 2\pi)$ ed una maggiore differenza da (2π) si verifica, quanto più si è vicini alla massa che genera il campo.

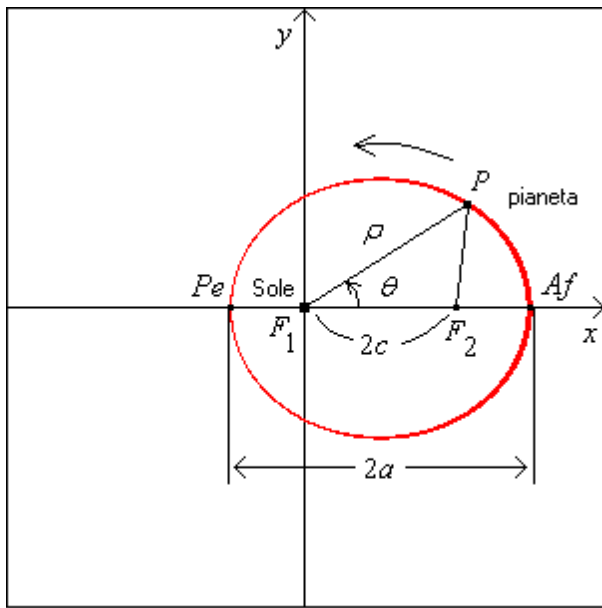
Le traiettorie (che differiscono di poco da quelle classiche) disegnano nello spazio una sorta di "rosetta", come possiamo vedere nella (Fig.9.2).



(Fig. 9.2)

Prendiamo dal testo di Vittorio Banfi, la seguente "formuletta" (ottenuta con un procedimento matematico lungo e tortuoso), la quale ci permette di calcolare l'avanzamento secolare del perielio (il punto dell'orbita dove il pianeta è più vicino al sole); uno dei due punti (l'altro è l'afelio), dove si verifica la condizione $\left(\frac{dr}{ds} = 0\right)$:

$$\Delta\omega = \frac{6\pi G N}{a(1-e^2)c^2} M_s \quad (9.6)$$



(Fig. 9.3)

Nella quale, con riferimento alla (Fig. 9.3), abbiamo:

$\Delta\omega$ avanzamento secolare del perielio (rad)

$e = \frac{c}{a}$ l' eccentricità dell'orbita (definita come il rapporto tra la semidistanza dei fuochi ed il semiasse maggiore)

a la lunghezza del semiasse maggiore (m)

G la costante di gravitazione universale $\frac{Nm^2}{kg^2}$

c la velocità della luce nel vuoto (m/s)

M_s la massa del Sole (kg)

N il numero di rivoluzioni del pianeta in 100 anni (un secolo) terrestri

Non ci resta a questo punto, che inserire nella (9.6) i dati orbitali del pianeta Mercurio:

$$e = 0.20561$$

$$a = 5.791 \times 10^{10} \text{ m}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

$$M_s = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$N = 415 \text{ rivoluzioni}$$

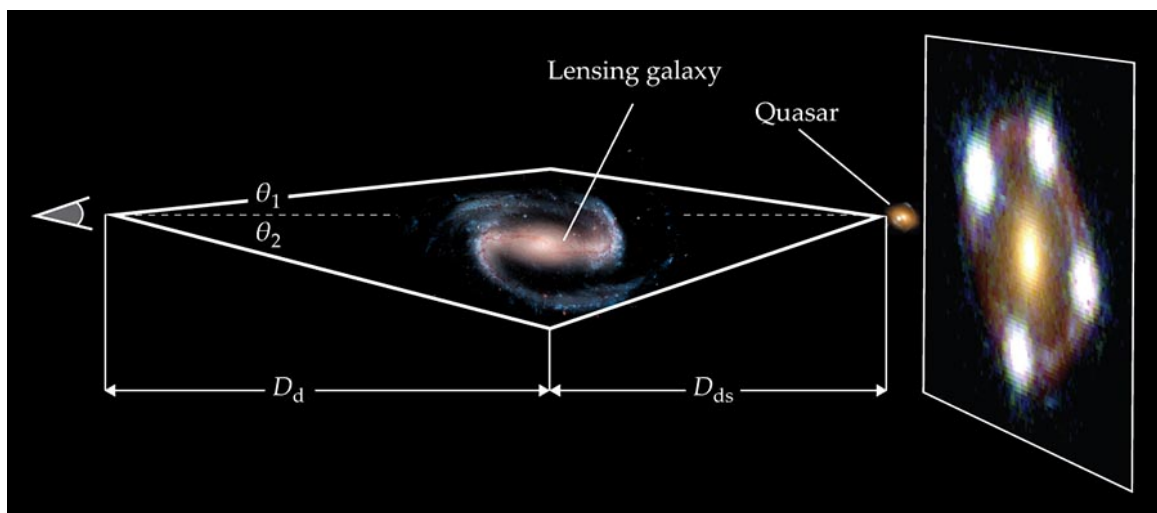
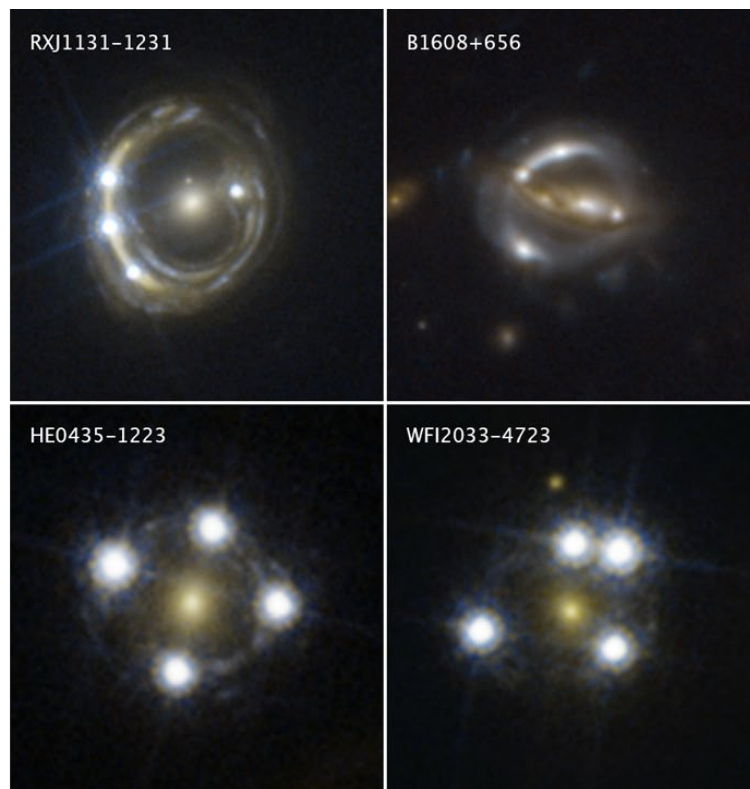
Per ottenere: $\Delta\omega = 0.000213 \text{ rad} = 0^\circ 00' 44''$ (cioè 44 arcosecondi)

un valore molto vicino ai (43 arcosecondi) osservati dagli astronomi e per spiegare i quali erano state avanzate varie ipotesi; tra le quali l'esistenza di un pianeta chiamato Vulcano (mai osservato) con un'orbita compresa tra Mercurio ed il Sole.

Il risultato di questo calcolo fu la prima prova a conferma della validità della "Teoria generale della relatività" ed assieme al corretto calcolo della deflessione dei raggi luminosi (il lensing gravitazionale) ad opera della gravità, costituisce uno dei capisaldi della teoria.

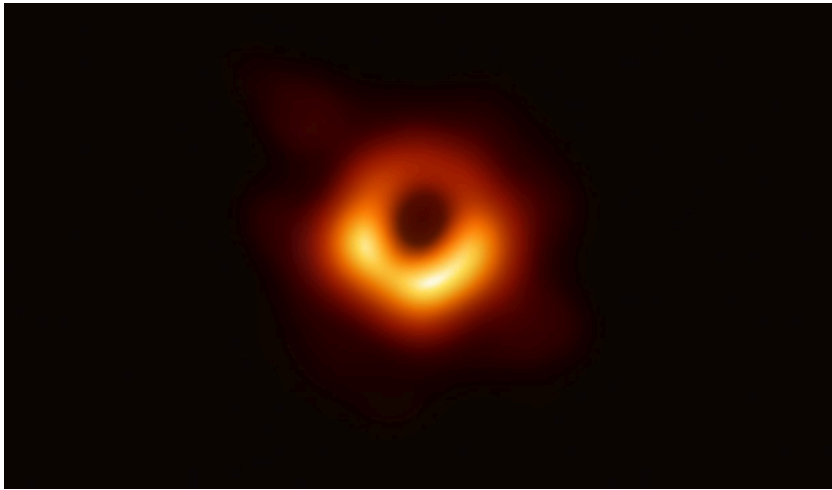
Il secondo effetto fu rivelato dall'astrofisico inglese Lord Eddington, con metodo fotografico durante un'eclissi di Sole nel 1919.

Ecco un'immagine di cosa si intende per lensing gravitazionale. Gli oggetti che vediamo come punti luminosi alla periferia delle immagini centrali, sono l'immagine ripetuta di un solo oggetto che si trova al di là della concentrazione di massa (quella al centro delle quattro immagini) che funge da lente gravitazionale, deviando il percorso dei raggi luminosi e creando immagini multiple dello stesso oggetto.



(10) - I buchi neri

La (Fig. 10.1) credo sia una delle immagini relative ad un buco nero, più trasmessa e visualizzata da quando si è iniziato a parlare di queste curiosità astronomiche.



(Fig. 10.1)

Didascalia dell'immagine: << L'immagine dell'orizzonte degli eventi del buco nero supermassiccio al centro della galassia Messier 87, proposta nel 2019 grazie a due anni di rilevamenti dei radiotelescopi dell'Event Horizon Telescope. Nell'immagine si può osservare l'«ombra» del buco nero: la materia attratta al suo interno, riscaldandosi, emette luce osservabile parzialmente grazie ai radiotelescopi, rendendo osservabile la zona "in ombra" all'interno del buco nero.>>

In questa sezione vado a crearmi un grande debito con "Wikipedia l'enciclopedia libera sul Web".

Nell'ambito della fisica classica, si era teorizzato nel XVIII secolo, la possibilità che un corpo avesse una massa così grande da non consentire, nemmeno alla luce di superare la sua velocità di fuga, per cui tale corpo sarebbe risultato invisibile.

John Michell nel 1783 evidenziò questa possibilità in una lettera a Henry Cavendish (l'uomo che genialmente col suo esperimento pesò la Terra), chiamando questo ipotetico corpo "stella oscura" (dark star).

Il termine "buco nero", è stato coniato dal fisico americano John Archibald Wheeler. L'aggettivo "nero" deriva dal fatto che non può emettere luce. Il fatto poi che nessuna particella che vi fosse catturata, possa più riemergere (nemmeno i fotoni) è la ragione del termine "buco".

La possibilità dell'esistenza di questi oggetti è emersa anche dall'esame di quella che viene chiamata "la metrica di Schwarzschild":

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (10.1) \quad \text{con} \quad r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (10.2)$$

ed il relativo "tensore metrico":

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{r_g}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (10.3)$$

Esaminando il tensore metrico (10.3), si vede che affinché la metrica abbia senso fisico, deve essere:

$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r} > 0$ (10.4) in più osserviamo, che il termine in (dr^2) della (10.1) all'approssimarsi di $(r \rightarrow r_g)$ diverge, dando luogo ad una singolarità.

Nel 1924 Arthur Eddington dimostrò che la singolarità cessava di esistere con una variazione di coordinate; finché poi nel 1933 George Lemaître si rese conto che la singolarità del raggio di Schwarzschild era una singolarità coordinata non fisica.

Einstein stesso (al quale la "singolarità" trovata da Schwarzschild nella sua soluzione, appariva come una pericolosa inconsistenza nella teoria generale della relatività) discusse questo punto in un lavoro del 1939, concludendo che per raggiungere una simile densità, le particelle materiali avrebbero dovuto superare la velocità della luce, in contrasto con la relatività speciale, affermando:

<<Il risultato fondamentale di questo studio è la chiara comprensione del perché le "singolarità di Schwarzschild" non esistono nella realtà fisica>>.

Nello stesso anno però, Robert Oppenheimer e H.Snyder mostrarono che la densità critica può essere raggiunta quando le particelle collassano radialmente.

Successivamente anche il fisico indiano A.Raychandhuri mostrò che la situazione ritenuta da Einstein non fisicamente realizzabile è, in realtà compatibile con la relatività generale:

<<[in questo lavoro] si ottiene una soluzione non statica delle equazioni gravitazionali di Einstein, che rappresenta un aggregato, dotato di simmetria sferica, di particelle che si muovono radialmente in uno spazio vuoto. Benché Einstein abbia ritenuto che la singolarità di Schwarzschild sia fisicamente irraggiungibile, poiché la materia non può essere concentrata arbitrariamente, la presente soluzione sembra dimostrare che non vi è un limite teorico al grado di concentrazione, e che la singolarità di Schwarzschild non ha significato fisico, in quanto compare solo in particolari sistemi di coordinate>>.

In epoche seguenti il raggio di Schwarzschild ha assunto il significato di raggio di quella superficie denominata "orizzonte degli eventi", cioè di quella superficie sferica, al di sotto della quale non possiamo più osservare nulla, grazie alla sistematica cattura della luce.

Nel 1931 Subrahmanyan Chandrasekhar, durante un viaggio in mare verso l'Inghilterra, aveva calcolato utilizzando la relatività speciale che un corpo non rotante di elettroni-materia degenere, al di sopra di un certo limite di massa (ora chiamato il limite di Chandrasekhar di 1,4 masse solari) non ha soluzioni stabili e quindi collassa.

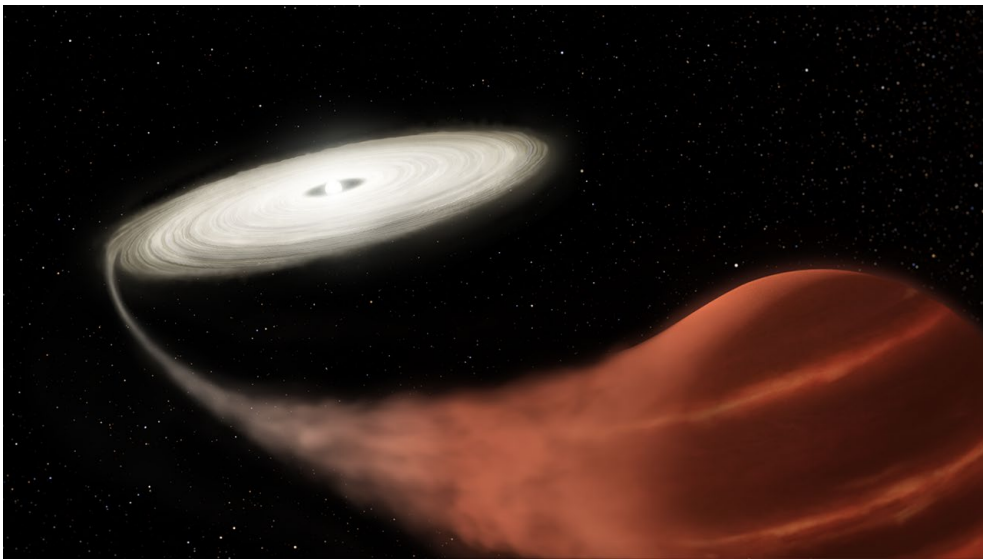
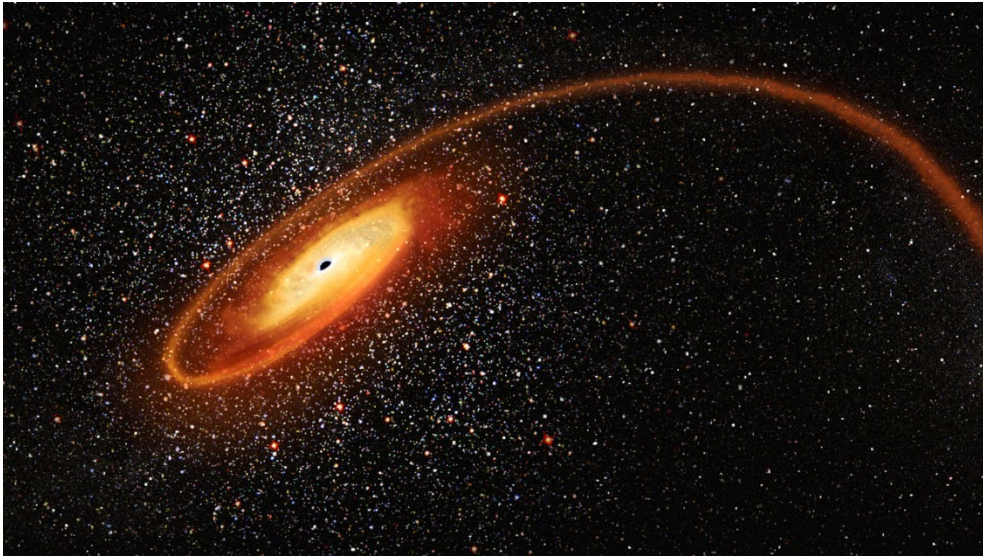
Secondo le teorie attuali, un buco nero può formarsi solamente da una stella che abbia una massa superiore a 2,5 volte circa quella del Sole; anche se a causa dei vari processi di perdita di massa, subiti dalle stelle al termine della loro vita, occorre che la stella in origine sia almeno dieci volte più massiccia del Sole.

La possibilità osservativa dei buchi neri, è legata alla voracità degli stessi; infatti l'intenso campo gravitazionale da essi generato, attira irrimediabilmente la materia circostante, accelerandola e riscaldandola, col risultato che questa emette radiazioni altamente energetiche per poi spegnersi alla nostra capacità osservativa, una volta superato "l'orizzonte degli eventi".

Un'altra conseguenza, dell'intenso campo gravitazionale nelle vicinanze dell'orizzonte degli eventi, è il rallentamento del tempo, per chi osserva da lontano l'avvicinarsi della materia al buco nero; questo ha la conseguenza, praticamente di un fermo immagine, chiamato anche congelamento (termine a mio parere inappropriato, visto le temperature in gioco).

Attualmente si pensa che ogni galassia abbia al centro un buco nero.

Terminiamo questo viaggio nell'affascinante mondo della relatività con qualche immagine, colta tra quelle più suggestive (riguardanti i buchi neri) raccolte dall' Hubble Telescope.



Bibliografia

G. Galilei - Dialogo dei massimi sistemi - 02/1632

A. Pais - Sottile è il Signore - Bollati Boringhieri - 05/2002

G. Giuliani ed I. Bonizzoni - Lineamenti di Elettromagnetismo - La Goliardica Pavese - 12/2003

V. Banfi - Relatività e astrodinamica - Levrotto e Bella (TO)- 09/2000

L. Landau e E. Lifchitz - Teoria dei campi

A. Amadori - GDS: geometria differenziale delle Superfici - 09/2011

A. Amadori - MRQ: meccanica, relatività, quanti - 08/2011

Manuale di Matematica - ISEDI - 04/1976

Wikipedia l'enciclopedia libera sul Web - 04/2020

Hubble Site - Web - 04/2020

Appendice 1 - La contrazione di Lorentz e Fitzgerald, dall'esperimento di Michelson e Morley.

Per dare una spiegazione al risultato nullo dell'esperimento di Michelson e Morley, salvando l'ipotesi dell'esistenza dell'etere, Lorentz e Fitzgerald ricavarono la contrazione delle lunghezze:

$$L = L_0 \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \quad (1)$$

e la dilatazione dei tempi:

$$t = t_0 \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \quad (2)$$

La quantità (L) espressa dalla (1) è la lunghezza che un corpo, avente lunghezza (L_0) nel sistema (S_0) solidale con l'etere, assume quando viene posto in moto alla velocità (v) del sistema di riferimento solidale con l'osservatore (S); mentre la quantità (t) espressa dalla (2) è il tempo che un orologio al polso dell'osservatore (S) registra per fenomeni, per i quali indicherebbe la durata (t_0), se si trovasse al polso di (S_0).

Quanto detto finora, richiede l'essere ampliato con le seguenti considerazioni, per una migliore focalizzazione:

- I corpi in moto con (S) sono lunghi (L) se li misuriamo col regolo campione dell'osservatore (S_0).
- Il tempo segnato dall'orologio in moto con l'osservatore (S), non può essere equivocato, nel senso che le sue lancette risultano rallentate e segnano un tempo (t) più corto, del tempo (t_0) che avrebbe segnato se fosse rimasto al polso dell'osservatore (S_0), a riposo nell'etere.

Abbiamo appena parlato della inequivocabilità del tempo, mentre per la lunghezza (L)

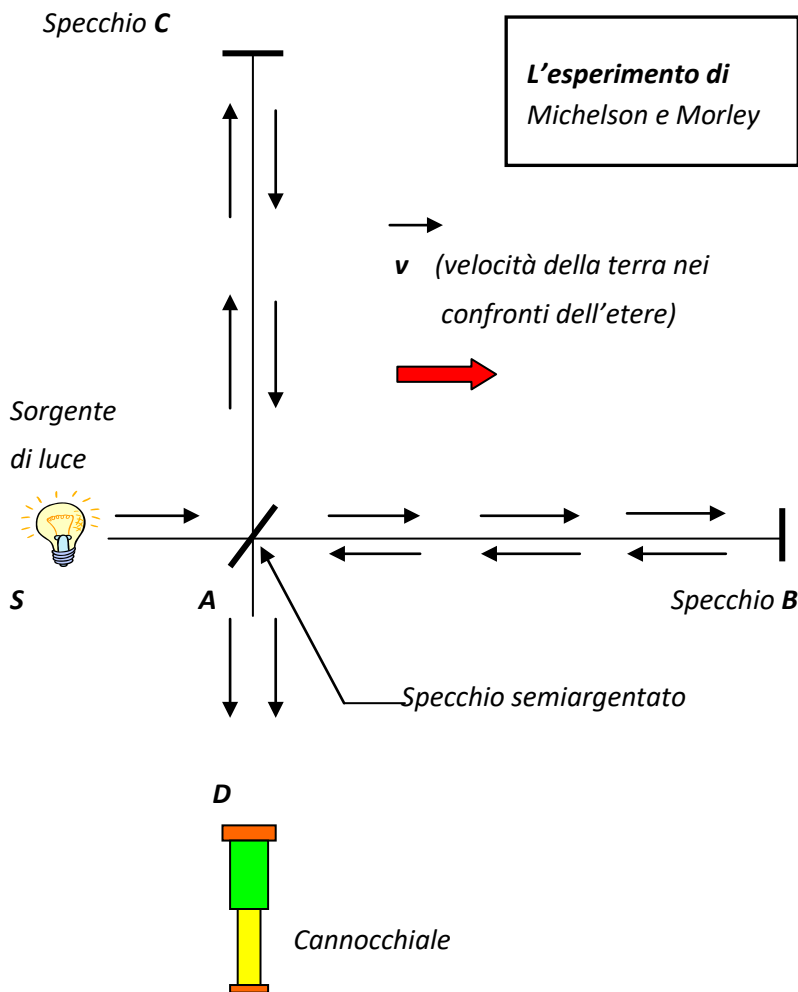
si può pensare la misura venga effettuata, col regolo campione del sistema in moto (S);

questo però non sarebbe corretto, poiché anche il regolo di (S) si è accorciato nella stessa proporzione e la misura del corpo eseguita da (S) darebbe sempre come risultato (L_0), cioè il regolo campione di (S) è sempre contenuto (L_0) volte nella lunghezza del corpo.

Per quanto riguarda il tempo (t) segnato dall'orologio in moto con (S), si può solo ribadire quanto già detto, si tratta del tempo registrato dalle sue lancette e la sua lettura può essere effettuata indifferentemente sia dall'osservatore in quiete (S_0), che dall'osservatore in moto (S), senza equivoci.

La stessa cosa non si può dire per la lunghezza dei corpi, ognuno degli osservatori, le misurerà col suo regolo campione e l'osservatore in moto (S) rimarrà un po' perplesso, nel vedere che il suo metro è più corto del metro esibito dall'osservatore in quiete nell'etere (S_0).

Seguiamo ora il percorso che porta a ricavare le (1) e (2) dal risultato dell'esperimento di Michelson e Morley. Allo scopo esaminiamo la figura seguente, la quale schematizza l'impostazione concettuale dell'esperimento.



Da una sorgente di luce monocromatica (S) parte un fascio luminoso che si divide in (A) su di uno specchio semiargentato, il quale riflette parzialmente il fascio di luce verso lo specchio (C) e lascia trasparire verso lo specchio (B) la restante parte del fascio inviato dalla sorgente.

Gli specchi (B) e (C) riflettono i due fasci luminosi rinviandoli verso (A), dove il fascio proveniente dallo specchio (B) viene deviato verso (D), ricombinandosi col fascio proveniente dallo specchio (C).

In (D) un cannocchiale permette di osservare i fenomeni di interferenza provocati dalla ricombinazione dei due fasci luminosi provenienti dagli specchi (B) e (C).

La lunghezza dei due bracci (A-B) ed (A-C) era regolabile in modo micrometrico ed il tutto era sospeso su di una base galleggiante sul mercurio e rotante sui 360° .

L'idea di Michelson era questa: rendiamo uguale la distanza dei bracci (A-B) e (A-C) osservando la figura di interferenza nel cannocchiale, poi ruotiamo l'apparato di 90° e vediamo in che modo cambia la figura di interferenza; perché come rappresentato in figura, la velocità dell'apparato nei confronti dell'etere, dovrebbe rendere non equivalenti i percorsi ottici dei due fasci luminosi, essendo gli stessi orientati: uno perpendicolarmente alla velocità

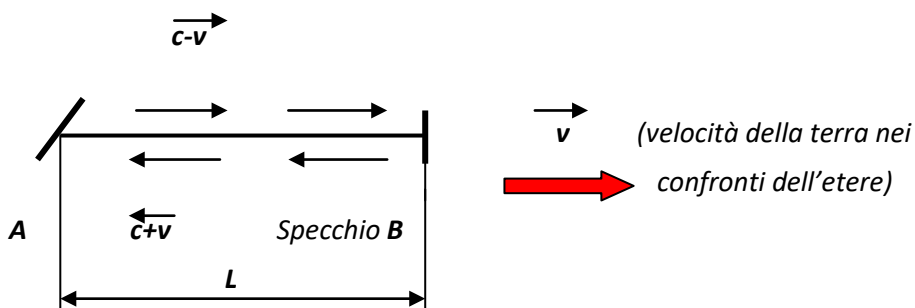
nell'etere e l'altro parallelamente alla stessa (nel seguito esplicherò le motivazioni che dovrebbero rendere non equivalenti i due percorsi).

Ebbene con grande sorpresa, ruotando l'apparato non vennero rilevate differenze nella figura di interferenza osservata nel cannocchiale.

L'esperimento fu ripetuto sei mesi più tardi ed in epoche successive, per escludere che in quel momento la terra fosse immobile nell'etere, ottenendo sempre lo stesso esito negativo.

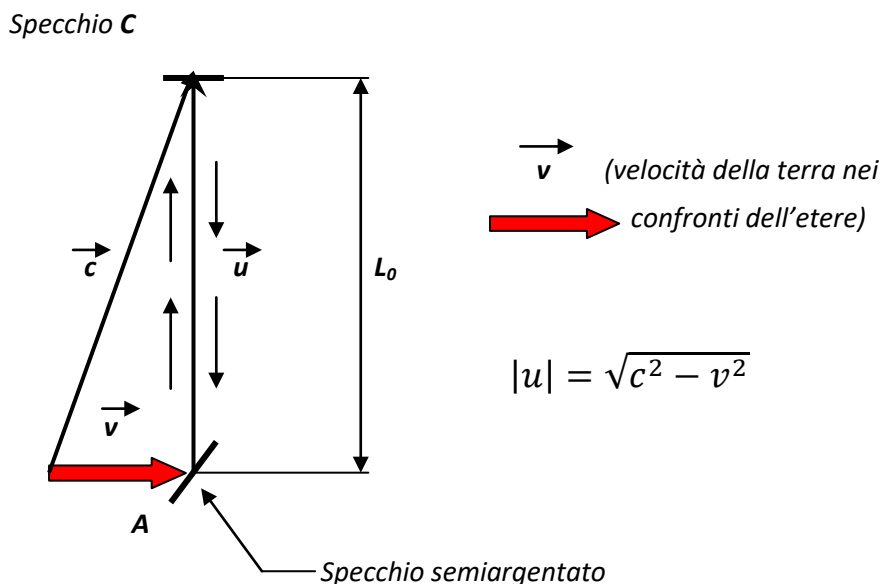
Analizziamo ora i due percorsi (A-B-A) ed (A-C-A), conservando l'orientamento rappresentato nella figura precedente:

- Per il percorso (A-B-A) il tempo impiegato dal fascio luminoso orientato nella direzione del moto della terra, sarà:



$$t = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2cL}{c^2-v^2} = \frac{2L}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \quad (3)$$

- Mentre per il fascio (A-C-A) orientato trasversalmente alla direzione del moto terrestre nei confronti dell'etere avremo:



$$t_0 = \frac{2L_0}{|u|} = \frac{2L_0}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2L_0}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (4)$$

Il fatto che non siano state rilevate differenze nello spostamento delle frange di interferenza, porta a concludere che i tempi di percorrenza dei due fasci luminosi, lungo i bracci dell'interferometro siano uguali, cioè:

$$t = t_0$$

A questo punto se si vuole salvare l'ipotesi dell'etere, cioè di un mezzo attraverso il quale si propagano le onde luminose e gli si vuole attribuire uno stato di riposo in un suo particolare sistema di riferimento, (nel quale valgono le equazioni di Maxwell e quindi la velocità della luce (c) è costante per tutte le direzioni di propagazione), dall'esame degli ultimi membri delle due espressioni (3) e (4), si evince che la differenza è da ricercarsi nei termini (L) ed (L_0), cioè nella lunghezza dei bracci dell'interferometro.

Mettiamo quindi a confronto queste due lunghezze, eguagliando gli ultimi termini delle (3) e (4) per ottenere:

$$\frac{2L}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{2L_0}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{da cui otteniamo:} \quad L = L_0 \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = L_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad (5)$$

Esaminando la (5) vediamo che il braccio orientato secondo la velocità (v) del moto nei confronti dell'etere, subisce una contrazione per un fattore: $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ritrovando così la (1).

Nel sistema di riferimento solidale con l'etere a riposo, la lunghezza dei due bracci sarebbe la stessa ed il tempo di percorrenza (t_0) sarebbe:

$$t_0 = \frac{2L_0}{c} \quad (6)$$

Possiamo a questo punto, renderci conto di un'altra importante conseguenza, che ci deriva dall'ipotesi sull'esistenza dell'etere e dal risultato dell'esperimento; allo scopo, dividiamo membro a membro la (3) con la (6), dove nella (3) sostituiamo (L) col valore fornito dalla (5), per ottenere:

$$\frac{t}{t_0} = \left[\frac{2L_0 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \right] / \left(\frac{2L_0}{c} \right) \quad \text{da cui:}$$

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (7)$$

siccome il termine al denominatore $\left[\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} < 1 \right]$, la (7) ci dice che un fenomeno della durata (t_0) nel sistema a riposo con l'etere, per evolversi nel sistema in moto richiede un tempo (t) più lungo.

Questo significa che un orologio, il quale comunque sia concepito, avanza col ritmo imposto da un qualunque fenomeno fisico periodico, (il battito cardiaco; l'oscillazione di un pendolo; la frequenza di una particolare oscillazione atomica), quando viene trasportato in un sistema di riferimento in moto nei confronti dell'etere, rallenta il suo movimento, rimanendo in ritardo e registrando quindi intervalli di tempo minori, rispetto ad un analogo cronometro posto a riposo nell'etere. L'apparente incongruenza tra l'espressione (7) e la (2) deriva dal fatto, che (t) e (t_0) nella (7) esprimono per lo stesso fenomeno la diversa durata nei due sistemi, mentre nella (2), (t) e (t_0) sono le indicazioni

sui quadranti dei cronometri, nei due sistemi e naturalmente un orologio più lento rimarrà indietro segnando un tempo minore.

Le evidenze sperimentali di questo fenomeno sono oramai così tante, che non vi sono più dubbi sulla solidità di questa previsione.

Il modo nel quale siamo giunti a questa conclusione, ci porta a pensare che la stessa solidità, si possa attribuire alla contrazione della lunghezza dei corpi in movimento.

Riporto da "Sottile è il Signore" di Abraham Pais come si esprimeva Lorentz , ad otto anni di distanza dalla formulazione della Relatività speciale, nel corso delle conferenze tenute alla Fondazione Teyler a Haarlem nel 1913:

["Secondo Einstein, non ha senso parlare di moto rispetto all'etere. Allo stesso modo Einstein nega l'esistenza della simultaneità assoluta. E' certo sorprendente che questi concetti relativistici, anche quelli riguardanti il tempo, siano stati accettati così rapidamente. La loro accettazione è in primo luogo un problema di carattere epistemologico (...) E' certo, tuttavia, che dipende in larga misura dal modo in cui si è abituati a pensare, il fatto di essere attratti dall'una piuttosto che dall'altra interpretazione. Per quanto riguarda chi vi parla, ho una certa preferenza per le interpretazioni precedenti, secondo le quali l'etere possiede almeno una qualche esistenza reale, lo spazio e il tempo possono essere nettamente separati, e si può parlare di simultaneità senza ulteriori specificazioni. Quanto a quest'ultimo punto, si può forse fare appello alla nostra capacità di immaginare velocità arbitrariamente grandi; in tal modo si giunge assai vicino al concetto di simultaneità assoluta. Infine si dovrebbe rilevare che l'asserzione, alquanto temeraria, che non sia mai possibile osservare velocità superiori a quella della luce, contiene una restrizione ipotetica di ciò che ci è accessibile, [restrizione] che non si può accettare senza qualche riserva."]

Nella premessa Pais scrive:

["Lorentz riteneva ancora che la contrazione dei regoli dovesse avere un'origine dinamica. Senza dubbio a quell'epoca aveva letto e compreso gli articoli di Einstein. Tuttavia, né allora né in seguito fu disposto ad accettare quei risultati come soluzione definitiva dei problemi dell'etere."]

Appendice 2 - Calcolo esplicito di un simbolo di Christoffel

In questa appendice, propongo il calcolo esplicito di un simbolo di Christoffel, come utile esercizio, per familiarizzare con queste notazioni compendiose.

$$\Gamma_{\mu\nu}^i = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^3 \left[\left(\frac{\partial g_{\nu l}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_l} \right) g^{il} \right]$$

Effettueremo il nostro calcolo sulle componenti della seguente metrica di Schwarzschild:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{r_g}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad r_g = \frac{2GM}{c^2}$$

ricordando anche, che (g^{il}) è un elemento della matrice:

$$[g^{ij}] = \frac{1}{\det(g_{ij})} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \quad \text{cioè la matrice inversa di } [g_{ij}]$$

Gli elementi C_{lm} ($l, m=1,2,3,4$) sono i complementi algebrici degli elementi della matrice $[g_{ij}]$, cioè ad esempio:

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} g_{00} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{12} & g_{13} \\ g_{30} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \quad \text{ottenuto dalla matrice } [g_{ij}] \text{ eliminandovi la terza riga e la seconda}$$

colonna.

Calcoleremo il simbolo:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial g_{10}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{01}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_0} \right) g^{10} + \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} \right) g^{11} + \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right) g^{12} + \left(\frac{\partial g_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_3} \right) g^{13} \right]$$

andiamo prima a sostituirvi sia gli elementi del tensore metrico (dove alcuni saranno nulli) che le coordinate ($x_0 = ct$, $x_1 = r$, $x_2 = \theta$, $x_3 = \varphi$):

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \left[\left(-\frac{\partial \left(-\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \right)}{\partial ct} \right) g^{10} + \left(\frac{\partial \left(-\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \right)}{\partial r} \right) g^{11} + \left(-\frac{\partial \left(-\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \right)}{\partial \theta} \right) g^{12} + \left(-\frac{\partial \left(-\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \right)}{\partial \varphi} \right) g^{13} \right] \quad (2.1)$$

Dei quattro termini della (2.1), solo il secondo ha senso, perchè l'elemento $g_{11} = -\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}$ non contiene le variabili (ct, θ e φ) e quindi saranno nulle le relative derivate.

$$\text{Ci limiteremo allora al calcolo della derivata: } \left(\frac{\partial \left(-\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \right)}{\partial r} \right) = \frac{\frac{r_g}{r^2}}{\left(1 - \frac{r_g}{r} \right)^2} \quad (2.2) \quad \text{e del fattore } g^{11} :$$

$$\text{allo scopo, calcoliamo prima: } \det(g_{ij}) = \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \left[\left(-\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \right) (-r^2) (-r^2 \sin^2 \theta) \right] = -r^4 \sin^2 \theta \quad (2.3)$$

$$e \text{ poi: } g^{11} = -\frac{1}{r^4 \sin^2 \theta} \det \begin{bmatrix} 1 - \frac{r_g}{r} & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} = -\frac{1}{r^4 \sin^2 \theta} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (-r^2)(r^2 \sin^2 \theta) = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \quad (2.4)$$

sostituendo poi i risultati delle (2.2) e (2.4) nella (2.2), avremo:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \left[-\frac{\frac{r_g}{r^2}}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \right] = -\frac{r_g}{2r(r-r_g)}$$

Appendice 3 - Calcolo esplicito del Tensore di Ricci (una componente)

Il calcolo delle componenti del Tensore di Ricci, viene eseguito calcolando prima, le componenti del Tensore misto di Riemann:

$$R_{\mu\nu}^i = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^i}{\partial x_k} - \frac{\partial \Gamma_{\mu k}^i}{\partial x_\nu} + \sum_{m=0}^3 \Gamma_{mk}^i \Gamma_{\mu\nu}^m - \sum_{m=0}^3 \Gamma_{m\nu}^i \Gamma_{\mu k}^m \quad (\text{Tensore misto di Riemann})$$

effettuando successivamente la contrazione sugli indici (i, k) :

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu k \nu}^k \quad (\text{Tensore di Ricci})$$

Calcoliamone la componente R_{11} utilizzando i seguenti simboli di Christoffel:

$$\Gamma_{01}^0 = \Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2a} \frac{da}{dr}, \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2b} \frac{da}{dr}, \quad \Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2b} \frac{db}{dr}, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{r}{b}, \quad \Gamma_{33}^1 = -\frac{r}{b} \sin^2 \theta$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

calcolati sul seguente tensore metrico:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} a(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

ricordando le posizioni fatte per le coordinate $(x_0 = ct, x_1 = r, x_2 = \theta, x_3 = \varphi)$ e la dipendenza delle variabili (a, b) dalla sola coordinata (r) . Allo scopo, dovremo prima calcolare le seguenti componenti del Tensore misto di Riemann: $R_{101}^0, R_{111}^1, R_{121}^2, R_{131}^3$, quindi procediamo:

$$R_{101}^0 = \frac{\partial \Gamma_{11}^0}{\partial x_0} - \frac{\partial \Gamma_{10}^0}{\partial x_1} + [(\Gamma_{00}^0 \Gamma_{11}^0 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{10}^0) + (\Gamma_{10}^0 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{10}^1) + (\Gamma_{20}^0 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{21}^0 \Gamma_{10}^2) + (\Gamma_{30}^0 \Gamma_{11}^3 - \Gamma_{31}^0 \Gamma_{10}^3)]$$

$$R_{101}^0 = \frac{\partial 0}{\partial ct} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{2a} \frac{da}{dr} + \left[\left(0 - \frac{1}{2a} \frac{da}{dr} \frac{1}{2a} \frac{da}{dr} \right) + \left(\frac{1}{2a} \frac{da}{dr} \frac{1}{2b} \frac{db}{dr} - 0 \right) + (0 - 0) + (0 - 0) \right]$$

$$= -\frac{1}{2a} \frac{d^2 a}{dr^2} + \frac{1}{4a^2} \left(\frac{da}{dr} \right)^2 + \frac{1}{4ab} \frac{da}{dr} \frac{db}{dr}$$

$$R_{111}^1 = \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Gamma_{11}^1}{\partial x_1} + [(\Gamma_{01}^1 \Gamma_{11}^0 - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{11}^0) + (\Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1) + (\Gamma_{21}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{11}^2) + (\Gamma_{31}^1 \Gamma_{11}^3 - \Gamma_{31}^1 \Gamma_{11}^3)] = 0$$

$$R_{121}^2 = \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial x_2} - \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x_1} + [(\Gamma_{02}^2 \Gamma_{11}^0 - \Gamma_{01}^2 \Gamma_{12}^0) + (\Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1) + (\Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2) + (\Gamma_{32}^2 \Gamma_{11}^3 - \Gamma_{31}^2 \Gamma_{12}^3)]$$

$$R_{121}^2 = \frac{\partial 0}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} + \left[(0 - 0) + \left(\frac{1}{r} \frac{1}{2b} \frac{db}{dr} - 0 \right) + \left(0 - \frac{1}{r} \frac{1}{r} \right) + (0 - 0) \right] = \frac{1}{2rb} \frac{db}{dr}$$

$$R_{131}^3 = \frac{\partial \Gamma_{11}^3}{\partial x_3} - \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial x_1} + [(\Gamma_{03}^3 \Gamma_{11}^0 - \Gamma_{01}^3 \Gamma_{13}^0) + (\Gamma_{13}^3 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{11}^3 \Gamma_{13}^1) + (\Gamma_{23}^3 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{21}^3 \Gamma_{13}^2) + (\Gamma_{33}^3 \Gamma_{11}^3 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{13}^3)]$$

$$R_{131}^3 = \frac{\partial 0}{\partial \varphi} - \frac{\partial 1}{\partial r r} + \left[(0 - 0) + \left(\frac{1}{r} \frac{1}{2b} \frac{db}{dr} - 0 \right) + (0 - 0) + \left(0 - \frac{1}{r} \frac{1}{r} \right) \right] = \frac{1}{2rb} \frac{db}{dr}$$

a questo punto effettuiamo la contrazione:

$$R_{11} = R_{1k1}^k = \sum_{k=0}^3 R_{1k1}^k = R_{101}^0 + R_{111}^1 + R_{121}^2 + R_{131}^3 \quad \text{e quindi sostituendo i risultati dei calcoli precedenti:}$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2a} \frac{d^2 a}{dr^2} + \frac{1}{4a^2} \left(\frac{da}{dr} \right)^2 + \frac{1}{4ab} \frac{da}{dr} \frac{db}{dr} + \frac{1}{2rb} \frac{db}{dr} + \frac{1}{2rb} \frac{db}{dr} = -\frac{1}{2a} \frac{d^2 a}{dr^2} + \frac{1}{4a^2} \left(\frac{da}{dr} \right)^2 + \frac{1}{4ab} \frac{da}{dr} \frac{db}{dr} + \frac{1}{rb} \frac{db}{dr}$$

$$\boxed{R_{11} = -\frac{1}{2a} \frac{d^2 a}{dr^2} + \frac{1}{4a^2} \left(\frac{da}{dr} \right)^2 + \frac{1}{4ab} \frac{da}{dr} \frac{db}{dr} + \frac{1}{rb} \frac{db}{dr}}$$

Dopo questa faticaccia, il pensiero corre allo sfortunato Karl Schwarzschild, che impegnato sul fronte russo si ritagliava il tempo per eseguire questi impegnativi e noiosi calcoli, e non ha praticamente fatto in tempo a godersi la gloria per il risultato ottenuto; morendo nel giro di un anno.