L'elettromagnetismo inerziale

La generalizzazione delle equazioni di Maxwell in sistemi di riferimento inerziali, in moto nell'Etere di Lorentz.

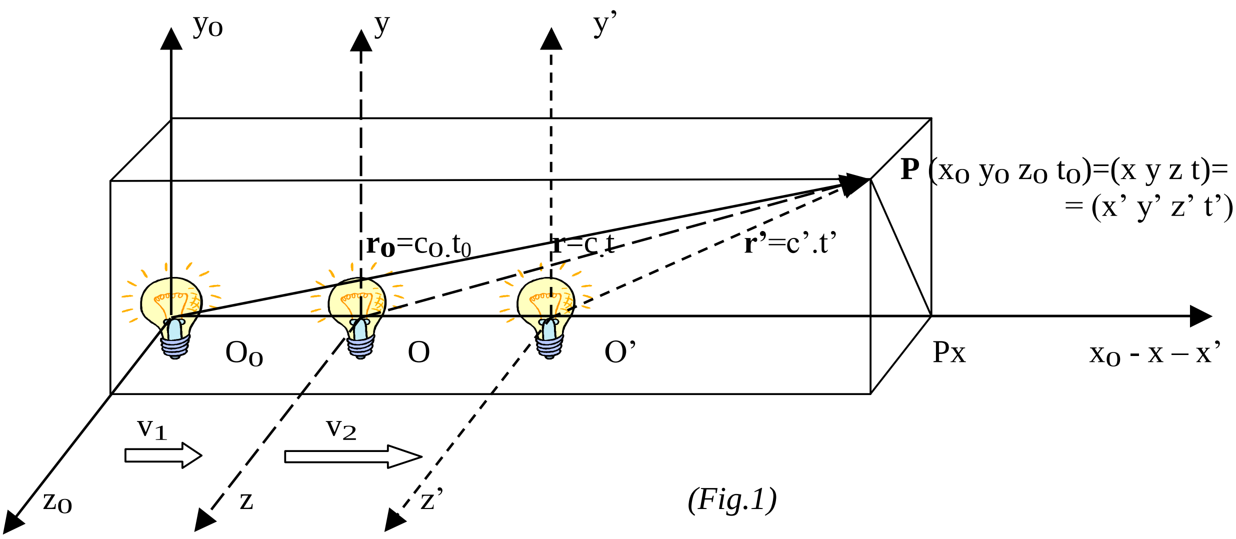
In questo scritto viene indagata la forma assunta dalle equazioni dell'elettromagnetismo, nel quadro di una visione relativistica eterodossa, la quale prevede che le equazioni di Maxwell, nella loro formulazione canonica, abbiano validità solamente in una classe di sistemi di riferimento inerziali: quelli a riposo nei confronti di un ipotetico mezzo, denominato "Etere", considerato il necessario mezzo per la trasmissione delle onde elettromagnetiche (L'Etere di Lorentz").
Giova precisare che la teoria relativistica menzionata, (la"Teoria della relatività inerziale"), allo stato attuale dei fatti, ha la stessa efficacia esplicativa, nei confronti del vasto panorama sperimentale, che supporta la nota teoria Einsteniana denominata "Teoria della relatività ristretta".

Angelo Montorsi

1) La trasformazione "di Lorentz" delle equazioni di Maxwell

La trasformazione delle equazioni dell'elettromagnetismo, denominate "equazioni di Maxwell", compare al paragrafo 6 (Elettrodinamica) del famoso articolo "L'elettrodinamica dei corpi in movimento", pubblicato nel 1905 sulla prestigiosa rivista degli "Annalen der Phisik", dall'impiegato dell'Ufficio Brevetti Svizzero Albert Einstein.
Nel seguito, aggiornando le notazioni, per renderle coerenti col testo di riferimento per la "Teoria della relatività inerziale", riproporrò lo schema dimostrativo utilizzato da A. Einstein nel suo famoso articolo, per poi effettuare la nostra derivazione, basandoci sull'applicazione delle "trasformazioni inerziali", le quali a differenza delle "trasformazioni di Lorentz"(quelle utilizzate da A.Einstein), sono ricavate sotto l'ipotesi che il" principio di relatività" di Galileiana memoria non abbia più valore.

<< Apro una parentesi per ricordare su quali fondamenta ho eretto la mia derivazione delle "trasformazioni inerziali":



(Fig.1)

a) *L'esistenza di un mezzo per la propagazione delle onde elettromagnetiche, denominato "etere" e di un sistema di riferimento inerziale privilegiato (S_0) a riposo nello stesso, nel quale la velocità della luce nel vuoto è (c) in ogni direzione.*

b) *I corpi in moto nei confronti del sistema di riferimento inerziale (S_0) subiscono la contrazione di Lorentz per il fattore [$\Upsilon_i = (1 - v_i^2/c^2)^{1/2}$] lungo la direzione della loro velocità (v_i).*

c) *I fenomeni fisici che hanno una determinata durata quando si svolgono nel sistema a riposo (S_0), richiedono un tempo maggiore per svolgersi nei sistemi in moto nei confronti di (S_0), per un fattore ($1 / \Upsilon_i$) (dilatazione dei tempi).*

I punti b) e c) traggono origine dall'ipotesi di Lorentz e Fitz Gerald per spiegare l'esito nullo dell'esperimento di Michelson e Morley, considerando questi effetti, come "reali", dinamici ed assoluti; causati dal movimento dei corpi nei confronti dell'etere.

Questa visione è in sintonia col secondo postulato della teoria relativistica classica, il quale afferma l'indipendenza della velocità di propagazione della luce, dallo stato di moto della sorgente; mentre si trova in totale disaccordo col primo, che sostiene l'equivalenza (o l'indistinguibilità) dei vari sistemi di riferimento inerziali, per la descrizione delle leggi della fisica (in buona sostanza il "principio di relatività").

Il "principio di relatività", nel paradigma che viene qui presentato, (dopo circa quattro secoli di onorato servizio), viene considerato non più valido.

L'altro aspetto peculiare di questa teoria è l'adozione di un sistema di sincronizzazione degli orologi: "assoluto", il quale segue dal derivare le "trasformazioni inerziali", adottando lo schema concettuale illustrato in Fig.1, dove i vari sistemi di riferimento disposti in "configurazione Standard" (allineamento degli assi coordinati O_i - x_i con le loro velocità v_i nei confronti del sistema privilegiato S_0, considerato a riposo nell'etere) si trovano tutti sovrapposti e con le origini O_i coincidenti all'istante di tempo $t_0=t_1=t_2=\ldots\ldots t_i=0$, eliminando così dalla nuova teoria relativistica, l'aspetto convenzionale sulla sincronizzazione degli orologi, introdotto a suo tempo da A.Einstein. >>

Chiusa la parentesi, per rendere più agevole il confronto tra la nostra derivazione e quella Einsteniana, adotteremo il sistema di misura di Gauss e con l'utilizzo dell'operatore vettoriale (nabla):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{z}$$

le equazioni dell'elettromagnetismo per lo spazio vuoto, in assenza di correnti di convezione, assumono la forma sintetica:

$$\nabla\cdot\vec{E} = 0 \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0$$
$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla\times\vec{B} = \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (1.1)$$

Ricordiamo che: $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\cdot\mu_0}}$ *è la velocità di propagazione della luce nel vuoto e:*

$$\vec{E} = E_x\cdot\vec{i} + E_y\cdot\vec{j} + E_z\cdot\vec{k} \qquad \vec{B} = B_x\cdot\vec{i} + B_y\cdot\vec{j} + B_z\cdot\vec{k} \qquad (1.2)$$

sono i vettori campo elettrico e campo magnetico rispettivamente, espressi in funzione delle loro componenti spaziali sugli assi (x,y,z) del sistema di riferimento cartesiano ortogonale associato ad un generico osservatore (O).

Rammentiamo anche, che le componenti: (E_x , E_y , E_z) e (B_x , B_y , B_z) sono a loro volta funzioni del punto P≡(x,y,z) e del tempo (t), con relazioni del tipo:

$$
\begin{array}{lll}
E_x=E_x(x,y,z,t) & E_y=E_y(x,y,z,t) & E_z=E_z(x,y,z,t) \\
B_x=B_x(x,y,z,t) & B_y=B_y(x,y,z,t) & B_z=B_z(x,y,z,t)
\end{array}
\qquad (1.3)
$$

Sempre per agevolare il confronto, riportiamo le seguenti equivalenze :

$$
\begin{array}{lll}
E_x=X & E_y=Y & E_z=Z \\
B_x=L & B_y=M & B_z=N
\end{array}
$$

rendendo conto delle notazioni utilizzate da A.Einstein, per designare le componenti dei campi elettrico e magnetico.

Ricordando che:

$$
\nabla\times\vec{E}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & E_z\end{vmatrix}
\qquad ; \qquad
\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{\partial E_x}{\partial t}\vec{i}+\frac{\partial E_y}{\partial t}\vec{j}+\frac{\partial E_z}{\partial t}\vec{k}
$$

$$
\nabla\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}
\qquad ; \qquad
\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=\frac{\partial B_x}{\partial t}\vec{i}+\frac{\partial B_y}{\partial t}\vec{j}+\frac{\partial B_z}{\partial t}\vec{k}
$$

sviluppiamo le ultime due espressioni delle (1.1) e mettiamo a confronto le componenti, per ottenere:

$$
\begin{array}{lcl}
\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial E_x}{\partial t}=\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z} & ; & \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial B_x}{\partial t}=\frac{\partial E_y}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial y} \\
\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial E_y}{\partial t}=\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x} & ; & \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial B_y}{\partial t}=\frac{\partial E_z}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial z} \\
\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial E_z}{\partial t}=\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y} & ; & \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial B_z}{\partial t}=\frac{\partial E_x}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial x}
\end{array}
\qquad (1.4)
$$

Riproponendo poi il percorso seguito da A.Einstein, applichiamo a queste equazioni le "trasformazioni di Lorentz":

$$
x'=(x-v.t)/\gamma \quad ; \quad y'=y \quad ; \quad z'=z \quad ; \quad t'=(t-v.x/c^2)/\gamma \qquad (1.5)
$$

con : $\gamma=(1-v^2/c^2)^{1/2}$ *[Einstein pose invece* $\beta=1/(1-v^2/c^2)^{1/2}$ *], riferendo i fenomeni elettromagnetici ad un sistema di coordinate mobile (O',x',y',z',t'), dotato di velocità (v) nei confronti del sistema di coordinate (O,x,y,z,t) considerato sinora.*

Per una migliore comprensione del metodo utilizzato da Einstein, sviluppiamo in dettaglio tra le (1.4) la:

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial E_y}{\partial t}=\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x} \qquad (1.6)$$

ricavando prima:

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial E_y}{\partial t}=\frac{1}{c}\cdot\left(\frac{\partial E_y}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{\partial E_y}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial t}+\frac{\partial E_y}{\partial z'}\cdot\frac{\partial z'}{\partial t}+\frac{\partial E_y}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial t}\right) \qquad (1.7)$$

nella quale andiamo a sostituire le seguenti espressioni, ottenute derivando le (1.5):

$$\frac{\partial x'}{\partial t}=-\frac{v}{\gamma} \quad ; \quad \frac{\partial y'}{\partial t}=0 \quad ; \quad \frac{\partial z'}{\partial t}=0 \quad ; \quad \frac{\partial t'}{\partial t}=\frac{1}{\gamma} \qquad (1.8)$$

per ottenere:

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial E_y}{\partial t}=\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial E_y}{\partial t'}\cdot\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial E_y}{\partial x'}\cdot\frac{v}{\gamma} \qquad (1.9)$$

poi sviluppiamo gli altri due termini al secondo membro della (1.6):

$$\frac{\partial B_x}{\partial z}=\frac{\partial B_x}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial z}+\frac{\partial B_x}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial z}+\frac{\partial B_x}{\partial z'}\cdot\frac{\partial z'}{\partial z}+\frac{\partial B_x}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial z}=\frac{\partial B_x}{\partial z'} \qquad (1.10)$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x}=-\frac{\partial B_z}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial x}-\frac{\partial B_z}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x}-\frac{\partial B_z}{\partial z'}\cdot\frac{\partial z'}{\partial x}-\frac{\partial B_z}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial x}=\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\partial B_z}{\partial t'}\cdot\frac{v}{c^2}-\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\partial B_z}{\partial x'} \qquad (1.11)$$

sostituendo le (1.9);(1.10) e (1.11) nella (1.6) e raccogliendo opportunamente i termini, finalmente otteniamo la:

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t'}\cdot\left[\frac{1}{\gamma}\cdot\left(E_y-\frac{v}{c}\cdot B_z\right)\right]=\frac{\partial B_x}{\partial z'}-\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{1}{\gamma}\cdot\left(B_z-\frac{v}{c}\cdot E_y\right)\right]$$

Applicando a tutte e sei le equazioni (1.4) il metodo esplicitato poco sopra, otteniamo:

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial E_x}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial y'}\cdot\left[\frac{1}{\gamma}\cdot\left(B_z-\frac{v}{c}\cdot E_y\right)\right]-\frac{\partial}{\partial z'}\left[\frac{1}{\gamma}\cdot\left(B_y+\frac{v}{c}\cdot E_z\right)\right]$$

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t'}\cdot\left[\frac{1}{\gamma}\cdot\left(E_y-\frac{v}{c}\cdot B_z\right)\right]=\frac{\partial B_x}{\partial z'}-\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{1}{\gamma}\cdot\left(B_z-\frac{v}{c}\cdot E_y\right)\right]$$

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t'}\cdot\left[\frac{1}{\gamma}\cdot\left(E_z+\frac{v}{c}\cdot B_y\right)\right]=\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{1}{\gamma}\cdot\left(B_y+\frac{v}{c}\cdot E_z\right)\right]-\frac{\partial B_x}{\partial y'}$$

(1.12)

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial B_x}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial z'}\cdot\left[\frac{1}{\gamma}\cdot\left(E_y-\frac{v}{c}\cdot B_z\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{1}{\gamma}\cdot\left(E_z+\frac{v}{c}\cdot B_y\right)\right]$$

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t'}\cdot\left[\frac{1}{\gamma}\cdot\left(B_y+\frac{v}{c}\cdot E_z\right)\right]=\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{1}{\gamma}\cdot\left(E_z+\frac{v}{c}\cdot B_y\right)\right]-\frac{\partial E_x}{\partial z'}$$

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t'}\cdot\left[\frac{1}{\gamma}\cdot\left(B_z-\frac{v}{c}\cdot E_y\right)\right]=\frac{\partial E_x}{\partial y'}-\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{1}{\gamma}\cdot\left(E_y-\frac{v}{c}\cdot B_z\right)\right]$$

ove al solito: $\gamma=(1-v^2/c^2)^{1/2}$
Sempre per facilitare il confronto, ricordiamo che A.Einstein pose: $\beta=1/(1-v^2/c^2)^{1/2}$ e: $x'=\xi$, $y'=\eta$, $z'=\zeta$.

Proseguendo nel cammino tracciato da Albert E. osserviamo che: << Il principio di relatività esige ora che le equazioni di Maxwell-Hertz per lo spazio vuoto, se sono valide nel sistema (O,x,y,x,t), lo siano anche nel sistema (O',x',y',z',t'); ciò equivale a dire che le componenti dei vettori della forza elettrica e della forza magnetica del sistema in moto [(E_x', E_y', E_z') e (B_x', B_y', B_z')], definiti per mezzo delle loro azioni ponderomotrici rispettivamente su masse elettriche e magnetiche, soddisfano le equazioni >>:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial E_x'}{\partial t'}=\frac{\partial B_z'}{\partial y'}-\frac{\partial B_y'}{\partial z'} \quad ; \quad \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial B_x'}{\partial t'}=\frac{\partial E_y'}{\partial z'}-\frac{\partial E_z'}{\partial y'}\\
&\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial E_y'}{\partial t'}=\frac{\partial B_x'}{\partial z'}-\frac{\partial B_z'}{\partial x'} \quad ; \quad \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial B_y'}{\partial t'}=\frac{\partial E_z'}{\partial x'}-\frac{\partial E_x'}{\partial z'} \qquad (1.13)\\
&\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial E_z'}{\partial t'}=\frac{\partial B_y'}{\partial x'}-\frac{\partial B_x'}{\partial y'} \quad ; \quad \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial B_z'}{\partial t'}=\frac{\partial E_x'}{\partial y'}-\frac{\partial E_y'}{\partial x'}
\end{aligned}
$$

<< Evidentemente questi due sistemi di equazioni trovati per il sistema (O',x',y',z',t') devono esprimere la stessa cosa, poiché entrambi sono equivalenti alle equazioni di Maxwell-Hertz per il sistema (O,x,y,z,t). Poiché, inoltre, le loro equazioni hanno la stessa forma, a parte i simboli dei vettori, le funzioni che vi compaiono in posizioni corrispondenti devono corrispondersi a meno di un fattore [$\psi(v)$] (indipendente da x',y',z' e t', ma dipendente da v) che è comune a tutte le funzioni di uno dei sistemi di equazioni >>. Valgono così le relazioni:

$$
\begin{aligned}
&E_x'=\psi(v)\cdot E_x \quad ; \quad B_x'=\psi(v)\cdot B_x\\
&E_y'=\psi(v)\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot\left(E_y-\frac{v}{c}\cdot B_z\right) \quad ; \quad B_y'=\psi(v)\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot\left(B_y+\frac{v}{c}\cdot E_z\right) \qquad (1.14)\\
&E_z'=\psi(v)\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot\left(E_z+\frac{v}{c}\cdot B_y\right) \quad ; \quad B_z'=\psi(v)\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot\left(B_z-\frac{v}{c}\cdot E_y\right)
\end{aligned}
$$

A questo punto A.Einstein ricava la condizione per cui deve essere: $\psi(v)=1$ e le (1.14) assumono la forma:

$$
\begin{aligned}
&E_x'=E_x \quad ; \quad B_x'=B_x\\
&E_y'=\frac{1}{\gamma}\cdot\left(E_y-\frac{v}{c}\cdot B_z\right) \quad ; \quad B_y'=\frac{1}{\gamma}\cdot\left(B_y+\frac{v}{c}\cdot E_z\right) \qquad (1.15)\\
&E_z'=\frac{1}{\gamma}\cdot\left(E_z+\frac{v}{c}\cdot B_y\right) \quad ; \quad B_z'=\frac{1}{\gamma}\cdot\left(B_z-\frac{v}{c}\cdot E_y\right)
\end{aligned}
$$

Einstein conclude il paragrafo 6 del suo articolo con le considerazioni sull'interpretazione da dare a queste equazioni.

---

2) La trasformazione "inerziale" delle equazioni di Maxwell

Giunti a questo punto mi propongo il ricavare le conseguenze derivanti la sostituzione delle "trasformazioni di Lorentz" con le "trasformazioni inerziali", negando la validità del "principio di relatività" e considerando che l'accorciamento dei corpi ed il rallentamento degli orologi in movimento nei confronti dell'etere, siano effetti reali e dinamici (non solo puramente cinematici), la cui misura, sia direttamente proporzionale al fattore [$\gamma=(1-v^2/c^2)^{1/2}$].

Iniziamo applicando alle sei equazioni (1.4) le "trasformazioni inerziali":

$$x'=(x-v.t)/\gamma \quad ; \quad y'=y \quad ; \quad z'=z \quad ; \quad t'=t.\gamma \qquad (2.1)$$

ove al solito: [$\gamma=(1-v^2/c^2)^{1/2}$]

riferendo i fenomeni elettromagnetici al sistema di coordinate mobile (O',x',y',z',t'), dotato di velocità (v) nei confronti del sistema di coordinate (O,x,y,z,t), non più generico, ma questa volta considerato a riposo nell'etere.

Anche nella nostra trattazione, sviluppiamo in dettaglio tra le (1.4) la:

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial E_y}{\partial t}=\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x} \qquad (2.2)$$

per avere:

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial E_y}{\partial t}=\frac{1}{c}\cdot\left(\frac{\partial E_y}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{\partial E_y}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial t}+\frac{\partial E_y}{\partial z'}\cdot\frac{\partial z'}{\partial t}+\frac{\partial E_y}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial t}\right) \qquad (2.3)$$

derivando poi rispetto al tempo (t) le (2.1), ricaviamo:

$$\frac{\partial x'}{\partial t}=-\frac{v}{\gamma} \quad ; \quad \frac{\partial y'}{\partial t}=0 \quad ; \quad \frac{\partial z'}{\partial t}=0 \quad ; \quad \frac{\partial t'}{\partial t}=\gamma \qquad (2.4)$$

le quali sostituite nella (2.3) ci porgono:

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial E_y}{\partial t}=\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial E_y}{\partial t'}\cdot\gamma-\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial E_y}{\partial x'}\cdot\frac{v}{\gamma} \qquad (2.5)$$

andremo poi a ricavare le:

$$\frac{\partial B_x}{\partial z}=\frac{\partial B_x}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial z}+\frac{\partial B_x}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial z}+\frac{\partial B_x}{\partial z'}\cdot\frac{\partial z'}{\partial z}+\frac{\partial B_x}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial z}=\frac{\partial B_x}{\partial z'} \qquad (2.6)$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x}=-\frac{\partial B_z}{\partial x'}\cdot\frac{\partial x'}{\partial x}-\frac{\partial B_z}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial x}-\frac{\partial B_z}{\partial z'}\cdot\frac{\partial z'}{\partial x}-\frac{\partial B_z}{\partial t'}\cdot\frac{\partial t'}{\partial x}=-\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\partial B_z}{\partial x'} \qquad (2.7)$$

Sostituendo ora le (2.5),(2.6) e (2.7) nella (2.2) e raccogliendo opportunamente i termini otteniamo:

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t'}\left(\gamma\cdot E_y\right)=\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{1}{\gamma}\cdot\left(\frac{v}{c}\cdot E_y-B_z\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z'}\left(B_x\right)$$

Applicando ora il metodo appena esplicitato, alle altre cinque relazioni delle (1.4) ricaviamo infine:

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t'}\left(\gamma\cdot E_x\right)=\frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{1}{\gamma}\cdot\left(B_z-\frac{v}{c}\cdot E_y\right)\right]-\frac{\partial}{\partial z'}\left[\frac{1}{\gamma}\cdot\left(B_y+\frac{v}{c}\cdot E_z\right)\right]$$
$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t'}\left(\gamma\cdot E_y\right)=\frac{\partial}{\partial z'}\left(B_x\right)-\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{1}{\gamma}\cdot\left(B_z-\frac{v}{c}\cdot E_y\right)\right]$$
$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t'}\left(\gamma\cdot E_z\right)=\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{1}{\gamma}\cdot\left(B_y+\frac{v}{c}\cdot E_z\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y'}\left(B_x\right)$$

(2.8)

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t'}\left(\gamma\cdot B_x\right)=\frac{\partial}{\partial z'}\left(E_y+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{v}{c}\cdot B_z\right)-\frac{\partial}{\partial y'}\left(E_z-\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{v}{c}\cdot B_y\right)$$
$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t'}\left(\gamma\cdot B_y\right)=\frac{\partial}{\partial x'}\left(E_y-\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{v}{c}\cdot B_y\right)-\frac{\partial}{\partial z'}\left(E_x\right)$$
$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial}{\partial t'}\left(\gamma\cdot B_z\right)=\frac{\partial}{\partial y'}\left(E_x\right)-\frac{\partial}{\partial x'}\left(E_y+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{v}{c}\cdot B_z\right)$$

ove come solito: $[\gamma=(1-v^2/c^2)^{1/2}]$

Le (2.8) ricavate con l'applicazione delle "trasformazioni inerziali" rappresentano la variazione del campo elettrico e del campo magnetico per un generico sistema di riferimento, nel passaggio dallo stato di quiete nei confronti dell'etere, allo stato di moto con velocità (v) positiva, uniforme ed orientata lungo il verso positivo dell'asse (O,x) (che come ricordiamo rappresenta la configurazione utilizzata per ricavare, sia le "trasformazioni inerziali", che le "trasformazioni di Lorentz).

L'analisi delle (2.8) ci porta a trarre le seguenti conclusioni:

a) *Gli argomenti delle derivate parziali* $\left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)$ *fatte rispetto al tempo, che compaiono ai primi membri delle sei relazioni trovate, ci informano che il campo elettromagnetico tende a stabilizzarsi su valori nulli al tendere di (v) a (c) [per la tendenza ad annullarsi delle componenti dei due campi: elettrico e magnetico], avendosi:*

$$\lim_{v\to c}\gamma=\lim_{v\to c}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=0$$

e di conseguenza anche la loro variazione rispetto al tempo.
Per le derivate parziali, fatte rispetto al tempo, il confronto con le (1.13) ci porta a stabilire le seguenti equivalenze:

$$E_x'=\gamma\cdot E_x \qquad E_y'=\gamma\cdot E_y \qquad E_z'=\gamma\cdot E_z$$
$$B_x'=\gamma\cdot B_x \qquad B_y'=\gamma\cdot B_y \qquad B_z'=\gamma\cdot B_z$$

b) *La forma delle (2.8) è analoga alla forma delle (1.4), quindi potremmo, proporre che anche per il sistema di riferimento (O’,x’,y’,z’,t’) sia valida la forma delle (1.13) e stabilire per le derivate parziali fatte rispetto alle variabili spaziali (x,y,z), le seguenti equivalenze:*

$$
\begin{aligned}
&E_x' = E_x && B_x' = B_x \\
&E_y' = E_y + \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{v}{c}\cdot B_z && B_y' = \frac{1}{\gamma}\cdot\left(B_y + \cdot\frac{v}{c}\cdot E_z\right) \qquad (2.9) \\
&E_z' = E_z - \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{v}{c}\cdot B_y && B_z' = \frac{1}{\gamma}\cdot\left(B_z - \cdot\frac{v}{c}\cdot E_y\right)
\end{aligned}
$$

le quali concordano per la più parte con le (1.15) che come ricordiamo, erano la conclusione riportata su “L’elettrodinamica dei corpi in movimento” di A.Einstein.

Le nostre (2.9) si differenziano dalle (1.15) (solo per derivate parziali fatte rispetto alle variabili spaziali) nelle seguenti due componenti del campo elettrico, le quali mettiamo a confronto nelle due seguenti colonne:

(Relatività inerziale)	(Relatività classica)
$E_y' = E_y + \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{v}{c}\cdot B_z$	$E_y' = \frac{1}{\gamma}\cdot\left(E_y - \frac{v}{c}\cdot B_z\right)$
$E_z' = E_z - \frac{1}{\gamma}\cdot\frac{v}{c}\cdot B_y$	$E_z' = \frac{1}{\gamma}\cdot\left(E_z + \frac{v}{c}\cdot B_y\right)$

e sono omologhe per quanto attiene le altre quattro componenti: (E_x') *del campo elettrico e* (B_x', B_y', B_z') *del campo magnetico.*

---

3) La generalizzazione delle equazioni di Maxwell per l’elettromagnetismo.

Nelle pagine precedenti, abbiamo seguito un percorso teso ad evidenziare le differenze tra la trattazione ortodossa e la nuova trattazione (basata sulle “trasformazioni inerziali”) per quanto attiene le equazioni dell’elettromagnetismo nello spazio vuoto, in assenza di cariche e correnti di conduzione.

Per rendere più facilmente fruibili i risultati che andremo ad ottenere, adotteremo per le equazioni di Maxwell, la forma che assumono nel sistema di misura internazionale (S.I.) e chiariremo meglio in seguito le differenze rispetto al sistema di misura di Gauss, utilizzato nelle pagine precedenti.

Una forma particolarmente sintetica (cfr. P.Mazzoldi,M.Nigro,C.Voci “Fisica” vol.2 pag.361) delle equazioni, nello spazio vuoto in presenza di cariche e correnti di conduzione, distribuite rispettivamente con densità (ρ) e $(\vec{J})$ *è la seguente:*

$$
\begin{aligned}
&\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} && \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\
& && \qquad\qquad\qquad (3.1) \\
&\nabla\cdot\vec{B} = 0 && \nabla\times\vec{B} = \mu_0\cdot\vec{J} + \mu_0\cdot\varepsilon_0\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

come al solito l'operatore vettoriale ∇ *(nabla) è così definito:*

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k} \qquad (3.2)$$

dove $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ *sono i versori lungo gli assi (x,y,z) di un sistema di riferimento cartesiano.*

Nelle (3.1) $\vec{E}$ *e* $\vec{B}$ *(come scritto in precedenza) sono rispettivamente, il campo elettrico ed il campo magnetico, funzioni vettoriali del punto (x,y,z), le quali possiamo scrivere in funzione delle componenti lungo i tre assi coordinati, in questo modo:*

$$\vec{E} = E_x\cdot\vec{i} + E_y\cdot\vec{j} + E_z\cdot\vec{k} \qquad \vec{B} = B_x\cdot\vec{i} + B_y\cdot\vec{j} + B_z\cdot\vec{k} \qquad (3.3)$$

con:

$$\begin{array}{lll} E_x=E_x\,(x,y,z,t) & E_y=E_y\,(x,y,z,t) & E_z=E_z\,(x,y,z,t) \\ B_x=B_x\,(x,y,z,t) & B_y=B_y\,(x,y,z,t) & B_z=B_z\,(x,y,z,t) \end{array} \qquad (3.4)$$

funzioni scalari del punto (x,y,z) al tempo (t).

Sempre nelle (3.1) (ε_0) *e* (μ_0) *sono la costante dielettrica e la permeabilità magnetica del vuoto, rispettivamente.*

La (ρ) esprime la densità di carica e sarà generalmente una funzione scalare del punto (x,y,z,) al tempo (t):

$$\rho = \rho(x,y,z,t) \qquad (3.5)$$

La $\left(\vec{J}\right)$ *densità di corrente elettrica, funzione vettoriale del punto (x,y,z) al tempo (t):*

$$\vec{J} = \vec{J}_x(x,y,z,t)\cdot\vec{i} + \vec{J}_y(x,y,z,t)\cdot\vec{j} + \vec{J}_z(x,y,z,t)\cdot\vec{k} \qquad (3.6)$$

Giova a questo punto ricordare che le (3.1) rappresentano la forma delle equazioni di Maxwell nel sistema di misura internazionale (S.I.); praticamente il sistema (M,K,S,A) razionalizzato.

Accanto alle (3.1) consideriamo anche la forza agente su di una carica (q), cioè la "forza di Lorentz":

$$\vec{F} = q\cdot\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) \qquad (3.7)$$

Nella letteratura fisica troviamo spesso le equazioni di Maxwell, espresse nel sistema di misura di Gauss.

Apriamo una parentesi per dire che la caratteristica peculiare del sistema di misura di Gauss, è l'introduzione di un fattore $\left(\frac{1}{c}\right)$ *tra le grandezze elettriche e magnetiche; ad esempio, la forza di Lorentz (3.7), nel sistema di misura di Gauss assume la forma:*

$$\vec{F} = q\cdot\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\cdot\vec{v}\times\vec{B}\right) \qquad \text{(sistema di misura di Gauss)}$$

Fatte queste osservazioni e ricordando che:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\cdot\mu_0}} \qquad \text{da cui:} \qquad c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0\cdot\mu_0}$$

abbiamo equivalenza tra le scritture:

$$\mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \textit{(sistemi MKSA – SI)} \quad e \quad \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \textit{(sistema di Gauss)}$$

infatti per passare dall'espressione nel sistema di misura di Gauss a quella nel sistema (SI) dobbiamo dividere per (c) anche il campo elettrico $(\vec{E})$ *ottenendo:*

$$\frac{1}{c} \cdot \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

chiusa la parentesi, torniamo a perseguire il nostro obiettivo ed allo scopo scriviamo le "trasformazioni inerziali" in questa forma generalizzata, nella quale si considera la contrazione di Lorentz sul generico asse coordinato, dipendente dalla componente su tale asse, della velocità $(\vec{v})$ *di spostamento, dell'origine del sistema mobile:*

$$x' = \frac{x - v_x \cdot t}{\gamma_x} \quad ; \quad y' = \frac{y - v_y \cdot t}{\gamma_y} \quad ; \quad z' = \frac{z - v_z \cdot t}{\gamma_z} \quad ; \quad t' = \gamma \cdot t \qquad (3.8)$$

ove al solito: $[\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,]$ *mentre:* $[\gamma_x = \sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}}\,;\;\; \gamma_y = \sqrt{1 - \frac{v_y^2}{c^2}}\,;\;\; \gamma_z = \sqrt{1 - \frac{v_z^2}{c^2}}\,]$.

Dalle (3.8) ricaviamo le seguenti derivate parziali che ci torneranno utili nel seguito:

$$\begin{array}{llll}
\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{1}{\gamma_x} & \frac{\partial y'}{\partial x} = 0 & \frac{\partial z'}{\partial x} = 0 & \frac{\partial t'}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial x'}{\partial y} = 0 & \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{1}{\gamma_y} & \frac{\partial z'}{\partial y} = 0 & \frac{\partial t'}{\partial y} = 0 \\
\frac{\partial x'}{\partial z} = 0 & \frac{\partial y'}{\partial z} = 0 & \frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{1}{\gamma_z} & \frac{\partial t'}{\partial z} = 0 \\
\frac{\partial x'}{\partial t} = -\frac{v_x}{\gamma_x} & \frac{\partial y'}{\partial t} = -\frac{v_y}{\gamma_y} & \frac{\partial z'}{\partial t} = -\frac{v_z}{\gamma_z} & \frac{\partial t'}{\partial t} = \gamma
\end{array} \qquad (3.9)$$

Da $\vec{E}(x, y, z, t)$ *applicando le "trasformazioni inerziali" (3.8) otteniamo* $\vec{E}(x', y', z', t')$, *come pure per* $(\vec{B}, \rho, \vec{J})$ *otteniamo espressioni in funzione del punto (x',y',z') al tempo (t') del sistema di riferimento inerziale, in moto nell'etere alla velocità (v).*

Iniziamo ricavando:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} = {} & \frac{\partial E_x}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x} + \\
& + \frac{\partial E_y}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial E_y}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial y} + \\
& + \frac{\partial E_z}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial z} + \frac{\partial E_z}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial z}
\end{aligned}$$

la quale sostituendovi le (3.9) ci porge:

$$[\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\gamma_x} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial x'} + \frac{1}{\gamma_y} \cdot \frac{\partial E_y}{\partial y'} + \frac{1}{\gamma_z} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial z'}\ ] \qquad (3.10)$$

analogamente avremo:

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + ... + \frac{\partial B_x}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x} + ...$$

$$[\ \nabla \cdot \vec{B} = \frac{1}{\gamma_x} \cdot \frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{1}{\gamma_y} \cdot \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{1}{\gamma_z} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z'}\ ] \qquad (3.11)$$

Sviluppiamo ora la: $\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$

$$\nabla \times \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \cdot \vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \cdot \vec{k} \qquad (3.12)$$

della quale andiamo ad esplicitare i termini:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_z}{\partial y} &= \frac{\partial E_z}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial y} = \frac{1}{\gamma_y} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y'} \\
\frac{\partial E_y}{\partial z} &= \frac{\partial E_y}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial z} + ... + \frac{\partial E_y}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial z} = \frac{1}{\gamma_z} \cdot \frac{\partial E_y}{\partial z'} \\
\frac{\partial E_x}{\partial z} &= \frac{\partial E_x}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial z} + ... + \frac{\partial E_x}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial z} = \frac{1}{\gamma_z} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z'} \\
\frac{\partial E_z}{\partial x} &= \frac{\partial E_z}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + ... + \frac{\partial E_z}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{1}{\gamma_x} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x'} \qquad (3.13) \\
\frac{\partial E_y}{\partial x} &= \frac{\partial E_y}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + ... + \frac{\partial E_y}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{1}{\gamma_x} \cdot \frac{\partial E_y}{\partial x'} \\
\frac{\partial E_x}{\partial y} &= \frac{\partial E_x}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial y} + ... + \frac{\partial E_x}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial y} = \frac{1}{\gamma_y} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial y'}
\end{aligned}$$

sostituendo poi le (3.13) nella (3.12) ed i versori $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *con i versori* $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ *del sistema di riferimento mobile (O',x',y',z',t'), otteniamo:*

$$\nabla \times \vec{E} = \left(\frac{1}{\gamma_y} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{1}{\gamma_z} \cdot \frac{\partial E_y}{\partial z'} \right) \cdot \vec{i}' + \left(\frac{1}{\gamma_z} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial z'} - \frac{1}{\gamma_x} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial x'} \right) \cdot \vec{j}' + \left(\frac{1}{\gamma_x} \cdot \frac{\partial E_y}{\partial x'} - \frac{1}{\gamma_y} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial y'} \right) \cdot \vec{k}'$$

cioè: $$[\ \nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ \frac{1}{\gamma_x} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} & \frac{1}{\gamma_y} \cdot \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{1}{\gamma_z} \cdot \frac{\partial}{\partial z'} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}\ ] \qquad (3.14)$$

[La sostituzione dei versori $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ *con i versori* $\left(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\right)$ *presuppone che nel sistema mobile si mantenga l'orientamento degli assi coordinati, parallelo agli assi del sistema di riferimento considerato a riposo nell'etere.*
La generalizzazione contenuta nelle (3.8) coinvolge soltanto il libero orientamento della velocità $\left(\vec{v}\right)$ *dell'origine del sistema di riferimento mobile, lasciando inalterate le altre caratteristiche della "configurazione Standard"]*

Ricaviamo ora:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \left(\frac{\partial B_x}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial B_x}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial B_x}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial B_x}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t}\right) \cdot \vec{i} +$$
$$\left(\frac{\partial B_y}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t}\right) \cdot \vec{j} +$$
$$\left(\frac{\partial B_z}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial t}\right) \cdot \vec{k}$$

nella quale andando a sostituire le posizioni fatte nelle (3.9) otteniamo:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \left(-\frac{v_x}{\gamma_x} \cdot \frac{\partial B_x}{\partial x'} - \frac{v_y}{\gamma_y} \cdot \frac{\partial B_x}{\partial y'} - \frac{v_z}{\gamma_z} \cdot \frac{\partial B_x}{\partial z'} + \gamma \cdot \frac{\partial B_x}{\partial t'}\right) \cdot \vec{i} +$$
$$+\left(-\frac{v_x}{\gamma_x} \cdot \frac{\partial B_y}{\partial x'} - \frac{v_y}{\gamma_y} \cdot \frac{\partial B_y}{\partial y'} - \frac{v_z}{\gamma_z} \cdot \frac{\partial B_y}{\partial z'} + \gamma \cdot \frac{\partial B_y}{\partial t'}\right) \cdot \vec{j} +$$
$$+\left(-\frac{v_x}{\gamma_x} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial x'} - \frac{v_y}{\gamma_y} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial y'} - \frac{v_z}{\gamma_z} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z'} + \gamma \cdot \frac{\partial B_z}{\partial t'}\right) \cdot \vec{k}$$

da cui, ponendo: $v_x = \vec{v} \cdot \vec{i}$ $\qquad v_y = \vec{v} \cdot \vec{j}$ $\qquad v_z = \vec{v} \cdot \vec{k}$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \gamma \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t'} - \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{i}}{\gamma_x} \cdot \frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}}{\gamma_y} \cdot \frac{\partial B_x}{\partial y'} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{\gamma_z} \cdot \frac{\partial B_x}{\partial z'}\right) \cdot \vec{i} -$$
$$-\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{i}}{\gamma_x} \cdot \frac{\partial B_y}{\partial x'} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}}{\gamma_y} \cdot \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{\gamma_z} \cdot \frac{\partial B_y}{\partial z'}\right) \cdot \vec{j} -$$
$$-\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{i}}{\gamma_x} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial x'} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}}{\gamma_y} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial y'} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{\gamma_z} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z'}\right) \cdot \vec{k}$$

ed applicando le regole del prodotto scalare tra versori:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \qquad \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 \qquad \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$
$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \qquad \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 \qquad \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$
$$\vec{j} \cdot \vec{i} = 0 \qquad \vec{k} \cdot \vec{i} = 0 \qquad \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$$

ricaviamo:

$$[\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \gamma \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t'} - \vec{v} \cdot \left(\frac{1}{\gamma_x} \cdot \frac{\partial B_x}{\partial x'} + \frac{1}{\gamma_y} \cdot \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{1}{\gamma_z} \cdot \frac{\partial B_z}{\partial z'} \right)\ ] \qquad (3.15)$$

Avremo anche:

$$[\quad \nabla \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ \frac{1}{\gamma_x} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} & \frac{1}{\gamma_y} \cdot \frac{\partial}{\partial y'} & \frac{1}{\gamma_z} \cdot \frac{\partial}{\partial z'} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad] \qquad (3.16)$$

e:

$$[\quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \gamma \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t'} - \vec{v} \cdot \left(\frac{1}{\gamma_x} \cdot \frac{\partial E_x}{\partial x'} + \frac{1}{\gamma_y} \cdot \frac{\partial E_y}{\partial y'} + \frac{1}{\gamma_z} \cdot \frac{\partial E_z}{\partial z'} \right) \quad] \qquad (3.17)$$

nelle quali abbiamo posto:

$$\gamma_x = \sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2}} \qquad \gamma_y = \sqrt{1 - \frac{v_y^2}{c^2}} \qquad \gamma_z = \sqrt{1 - \frac{v_z^2}{c^2}}$$

e naturalmente avremo:

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k} \qquad e \qquad \gamma = \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}$$

Ricordiamo che le (v_x, v_y, v_z) rappresentano le componenti del vettore velocità $(\vec{v})$ associato al moto dell'origine (O') del generico sistema di riferimento (O',x',y',z',t') mobile nei confronti del sistema privilegiato (O,x,y,z,t) considerato a riposo nell'etere e che si possono ottenere come risultato dei seguenti prodotti scalari:

$$v_x = \vec{v} \cdot \vec{i} \qquad v_y = \vec{v} \cdot \vec{j} \qquad v_z = \vec{v} \cdot \vec{k}$$

risultando ognuna, la proiezione di $(\vec{v})$ sull'asse coordinato corrispondente.

Fatta questa posizione, utilizzando le notazioni vettoriali possiamo porre:

$$\gamma_x = \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{i}}{c} \right)^2} \qquad \gamma_y = \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{j}}{c} \right)^2} \qquad \gamma_z = \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{c} \right)^2}$$

ed osservando la forma assunta dalle espressioni da (3.10) a (3.17) deduciamo che la nuova forma generalizzata per le equazioni di Maxwell si ottiene ridefinendo l'operatore ∇ (nabla) in questo modo:

$$\boxed{\nabla' = \frac{1}{\gamma_x} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} \cdot \vec{i} + \frac{1}{\gamma_y} \cdot \frac{\partial}{\partial y'} \cdot \vec{j} + \frac{1}{\gamma_z} \cdot \frac{\partial}{\partial z'} \cdot \vec{k}} \qquad (3.18)$$

e ridefinendo le (3.15) e (3.17) come:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \gamma \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t'} - \vec{v} \cdot \left(\nabla' \cdot \vec{B} \right) \qquad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \gamma \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t'} - \vec{v} \cdot \left(\nabla' \cdot \vec{E} \right) \qquad (3.19)$$

dove con [$\left(\nabla' \cdot \vec{B}\right)$ e $\left(\nabla' \cdot \vec{E}\right)$] si intende la divergenza delle funzioni vettoriali:

$$\vec{B} = \vec{B}(x', y', z', t') \qquad \vec{E} = \vec{E}(x', y', z', t')$$

ottenuta applicando la nuova definizione (3.18) per l'operatore ∇' *(nabla).*

Con le posizioni fatte, otteniamo finalmente la forma generalizzata delle "equazioni di Maxwell", valide in ogni sistema di riferimento inerziale:

(relatività inerziale)

$$\nabla' \cdot \vec{E} = \frac{\rho'}{\varepsilon_0} \qquad \nabla' \times \vec{E} = \vec{v} \cdot \left(\nabla' \cdot \vec{B}\right) - \gamma \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t'}$$

$$\nabla' \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla' \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J}' + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \left(\gamma \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t'} - \vec{v} \cdot \left(\nabla' \cdot \vec{E}\right)\right)$$

----

le quali risultano invarianti per "trasformazioni inerziali".

Risulta banale la verifica che per $\left(\vec{v} = 0\right)$*, per esse si ritrova la forma canonica, la quale riproponiamo per agevolare il confronto:*

(relatività classica)

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \qquad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J} + \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Conclusa questa fatica, una vocina interna, mi suggerisce che la modifica ∇' *all'operatore* ∇ *(nabla), proposta nella (3.18) e la ridefinizione della derivata di un vettore fatta rispetto al tempo, contenuta nelle (3.19), dovrebbero avere validità in tutti i contesti fisici, che possono essere studiati, mediante questi strumenti della geometria differenziale e del calcolo vettoriale.*

Bibliografia:

John Stachel (a cura di)
L'anno memorabile di Einstein
Edizioni DEDALO (Bari)

Albert Einstein (a cura di Enrico Bellone)
Opere scelte
Bollati Boringhieri

Franco Selleri
Lezioni di relatività
Progedit

P.Mazzoldi, M.Nigro, C.Voci
Fisica (vol.2-2° ediz.)
EdiSES

Angelo Montorsi
Scusa Albert
Inedito (amonto@tin.it per riceverne una copia gratuita)

(Finito di stampare con mezzi propri il 5/07/2005)